

Übungen zur Algebra II, WS 2002/03

Abgabe am Donnerstag, den 14.11.2002 vor der Vorlesung

Aufgabe 10. (Isomorphismen)

- Zeigen Sie: $\mathbb{Q}(\sqrt{-3}) = \mathbb{Q}(\exp(\frac{2\pi i}{3}))$.
- Gibt es einen \mathbb{Q} -Isomorphismus $\mathbb{Q}(\sqrt{-3}) \rightarrow \mathbb{Q}(\exp(\frac{2\pi i}{3}))$ mit $\sqrt{-3} \mapsto \exp(\frac{2\pi i}{3})$?
- Zeigen Sie, dass die Restklassenringe

$$K_1 = \mathbb{Q}[X]/(X^2 + 3) \quad \text{und} \quad K_2 = \mathbb{Q}[X]/(X^2 + X + 1)$$

Körper sind und geben Sie einen \mathbb{Q} -Isomorphismus $\phi : K_1 \rightarrow K_2$ mit $\bar{X} \mapsto \phi(\bar{X})$ explizit an.

Aufgabe 11. (Normale Körpererweiterungen)

Es sei $L \supset K$ eine endliche Körpererweiterung. Zeigen Sie, dass es eine endliche normale Körpererweiterung $L' \supset K$ gibt mit

$$L' \supset L \supset K .$$

Aufgabe 12. (Mehrfache Nullstellen)

- Bestimmen Sie die Nullstellenvielfachheiten der Nullstellen der folgenden Polynome in ihrem Zerfällungskörper (p Primzahl).
 - $X^5 - 2X^3 + 2 \in \mathbb{Q}[X]$,
 - $X^4 + 2X^3 - 3X^2 - 4X + 4 \in \mathbb{Q}[X]$,
 - $X^p - 1 \in \mathbb{Q}[X]$,
 - $X^p - 1 \in \mathbb{Z}_p[X]$.

(Hinweis: Dazu ist es nicht in jedem Fall erforderlich, die Nullstellen explizit anzugeben.)

- Sei p eine positive Primzahl und K ein Körper der Charakteristik p . Charakterisieren Sie die Polynome $f \in K[X]$ mit $f' = 0$.