Übungen zur Algebra II, WS 2002/03

Abgabe am Donnerstag, den 28.11.2002 vor der Vorlesung

Aufgabe 16. *(Auflösbare Gruppen)*
Seien p und q Primzahlen. Zeigen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung $p \cdot q$ auflösbar ist.

(Hinweis: Benutzen Sie die Sylowsätze aus Algebra I.)

Aufgabe 17. *(Elementarsymetrische Polynome)*
Es sei R ein kommutativer Ring. Entscheiden Sie, ob es sich bei den folgenden Polynomen um symetrische Polynome handelt, und stellen Sie diese gegebenenfalls als Polynom in den elementarsymetrischen Polynomen dar.

a) $X_1X_2^2 + X_1^2X_2 \in R[X_1, X_2]$,

b) $X_1^2X_2 + X_2^2X_3 + X_3^2X_1 \in R[X_1, X_2, X_3]$,

c) $X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 + X_4^3 \in R[X_1, X_2, X_3, X_4]$.

Aufgabe 18. *(Newtonsche Identitäten)*
Es sei $k \geq 1$ eine natürliche Zahl, K ein Körper der Charakteristik 0 und

$$F_k = X_1^k + \cdots + X_n^k \in K[X_1, \ldots, X_n] \ .$$

a) Beweisen Sie die Newtonschen Identitäten:

$$F_k - s_1F_{k-1} + \cdots + (-1)^{k-1}s_{k-1}F_1 + (-1)^k s_k k = 0 \ .$$

b) Erzeugen $F_1, F_2, \ldots, F_n$ den Ring der symetrischen Polynome?

(Hinweis: Zeigen Sie zuerst die Identitäten:

$$\begin{aligned}
s_1F_{k-1} &= \sum_{1\leq i_1<i_2\leq n} X_{i_1}^{k-1}X_{i_2} + \sum_{1\leq i_1<i_2\leq n} X_{i_1}X_{i_2}^{k-1} + \sum_{i=1}^{n} X_i^k \quad , \\
s_jF_{k-j} &= \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_{j+1}\leq n} X_{i_1}^{k-j}X_{i_2}\ldots X_{i_{j+1}} + \ldots + \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_{j+1}\leq n} X_{i_1}\ldots X_{i_j}X_{i_{j+1}}^{k-j} \\
&\quad + \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_j\leq n} X_{i_1}^{k-j+1}X_{i_2}\ldots X_{i_j} + \ldots + \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_j\leq n} X_{i_1}\ldots X_{i_{j-1}}X_{i_j}^{k-j+1} \\
&\quad \text{für alle } j = 2, \ldots, k-2 \ \text{ und} \\
s_{k-1}F_1 &= \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} k \cdot X_{i_1}X_{i_2}\ldots X_{i_k} \\
&\quad + \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_{k-1}\leq n} X_{i_1}^2X_{i_2}\ldots X_{i_{k-1}} + \ldots + \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_{k-1}\leq n} X_{i_1}\ldots X_{i_{k-2}}X_{i_{k-1}}^2 \quad .)
\end{aligned}$$