Übungen zur Algebra II, WS 2002/03

Abgabe am Donnerstag, den 05.12.2002 vor der Vorlesung

Aufgabe 19. *(Galoisgruppen I)*
Betrachten Sie die Körpererweiterungen $\mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2}) \supset \mathbb{Q}(i) \supset \mathbb{Q}$ und bestimmen Sie die Galoisgruppen:

a) $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(i), \mathbb{Q})$,

b) $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2}), \mathbb{Q}(i))$,

c) $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2}), \mathbb{Q})$.

Aufgabe 20. *(Galoisgruppen II)*
Es sei p eine Primzahl, n eine natürliche Zahl und $\mathbb{F}_{p^n}$ der Körper mit p^n Elementen. Wir betrachten die Körpererweiterung $\mathbb{F}_{p^n} \supset \mathbb{Z}_p$.
Beweisen Sie, dass der *Frobenius-Homomorphismus*

$$a \quad \mapsto \quad a^p$$

die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^n}, \mathbb{Z}_p)$ erzeugt, und folgern Sie:

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^n}, \mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_n \ .$$

Aufgabe 21. *(Umkehrproblem)*
Sei G eine beliebige endliche Gruppe. Zeigen Sie, dass es eine endliche Galoiserweiterung $L \supset K$ gibt, deren Galoisgruppe zu G isomorph ist.

(Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Cayley, welcher besagt, dass jede endliche Gruppe isomorph zu einer Untergruppe einer symmetrischen Gruppe ist.)