# Übungen zur Algebra II, WS 2002/03

Abgabe am Donnerstag, den 12.12.2002 vor der Vorlesung

**Aufgabe 22.** *(Hauptsatz der Galoistheorie)*
Es sei $K = \mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2})$ wie in Aufgabe 19.

a) Beschreiben Sie die Galoisgruppe $G = \mathrm{Gal}(K, \mathbb{Q})$ als Untergruppe der $S_4$.

b) Bestimmen Sie sämtliche Untergruppen von $G$ und sämtliche Zwischenkörper von $K \supset \mathbb{Q}$.

c) Bestimmen Sie sämtliche Normalteiler in $G$ und sämtliche Zwischenkörper $Z$ von $K \supset \mathbb{Q}$, so dass $Z \supset \mathbb{Q}$ normal ist.

Zeichnen Sie Diagramme, aus denen die Aussage des Hauptsatzes der Galoistheorie in diesem Beispiel ersichtlich wird.

**Aufgabe 23.** *(Galoiserweiterungen)*
Sei $f \in \mathbb{Q}[X]$ ein Polynom von Grad $n \geq 3$ und $K$ der Zerfällungkörper von $f$ über $\mathbb{Q}$. Weiterhin sei $\mathrm{Gal}(K, \mathbb{Q})$ isomorph zur symmetrischen Gruppe $S_n$. Zeigen Sie:

a) $f$ ist irreduzibel über $\mathbb{Q}$.

b) Sei $\alpha$ eine Nullstelle von $f$. Dann gibt es nur einen einzigen $\mathbb{Q}$-Automorphismus von $\mathbb{Q}(\alpha)$ (die Identität).

(Zusatz: Zeigen Sie für den Fall $n \geq 4$, dass $\alpha^n$ keine rationale Zahl ist.)

**Aufgabe 24.** *(Konstruierbarkeit des regelmäßigen n-Ecks)*

a) Es sei $n \geq 3$ eine natürliche Zahl. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

   (i) Das regelmäßige $n$-Eck ist über $\mathbb{Q}$ konstruierbar. (D.h. eine primitive $n$-te Einheitswurzel ist konstruierbar.)

   (ii) Der Wert der Eulerschen $\varphi$-Funktion $\varphi(n)$ ist eine Zweierpotenz.

b) Geben Sie unter alle positiven, in Grad gemessenen ganzzahligen Winkeln den kleinsten an, welcher über $\mathbb{Q}$ konstruierbar ist.