Übungen zur Algebra II, WS 2002/03

Abgabe am Donnerstag, den 19.12.2002 vor der Vorlesung

Aufgabe 25. *(Auflösen von Gleichungen)*
Lösungen Sie die folgenden Polynome f durch Radikale auf, und geben Sie eine Folge von Körpererweiterungen $K_k \supset K_{k-1} \supset \cdots \supset K_0 = \mathbb{Q}$ explizit an, so dass f in K_k eine Nullstelle besitzt und $K_i = K_{i-1}(a_i)$ mit $a_i^{n_i} \in K_{i-1}$ gilt.

a) $2X^2 + 5X + 27$,

b) $X^3 + 3X^2 + 5X + 27$,

c) $X^4 + 2X^2 + 4X + 2$,

d) $X^5 - 5X^4 + 10X^3 - 10X^2 + 5X - 28$,

e) $X^6 - 4X^3 - 23$.

Aufgabe 26. *(Radikalerweiterungen)*
Es sei K ein Körper der Charakteristik $p \neq 2$ und $a \in K$ kein Quadrat in K, d.h. $a \notin \{\, k^2 \mid k \in K \,\}$. Wir setzen $L = K(\sqrt{a})$, wobei $\sqrt{a}$ eine Nullstelle von $X^2 - a$ bezeichnet. Weiterhin seien $b, c \in K$ nicht beide Null und $\alpha = b + c\sqrt{a}$.
Sei nun $M = L(\sqrt{\alpha})$. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

a) $M \supset K$ ist eine Galoiserweiterung.

b) $M = L(\sqrt{\beta})$ mit $\beta = b - c\sqrt{a}$.

c) Eine der Zahlen $\alpha\beta = b^2 - ac^2$ oder $c\alpha\beta$ ist ein Quadrat in K.

(Hinweis: Betrachten Sie das Polynom $X^4 - 2bX^2 - ac^2 + b^2 \in K[X]$.)

Aufgabe 27. *(Durch Radikale lösbare Polynome)*
Es sei K ein Körper und f ein irreduzibles, separables Polynom über K, so dass eine Nullstelle x von f in einer Radikalerweiterung $L \supset K$ enthalten ist. Zeigen Sie: Jede andere Nullstelle y von f liegt ebenfalls in einer Radikalerweiterung von K.

(Hinweis: Untersuchen Sie ein $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{L}, K)$ mit $\sigma(x) = y$, wobei $\overline{L}$ den Zerfällungskörper von f über L bezeichnet.)