

Übungen zur Algebra II, WS 2002/03

Abgabe am Donnerstag, den 09.01.2003 vor der Vorlesung

Aufgabe 28. (Untervarietäten der affinen Gerade)

- a) (i) Es sei $X \subset \mathbb{A}^1$ eine affine Varietät. Zeigen Sie, dass X entweder eine endliche Menge oder gleich $\mathbb{A}^1$ ist.

(Hinweis: Betrachten Sie zuerst Varietäten der Form $X = V(\{f\})$, d.h. Varietäten, die durch ein einziges Polynom definiert werden.)

- (ii) Geben Sie im Gegensatz zu (i) ein Beispiel einer $\mathcal{C}^\infty$ -Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an, so dass die Nullstellenmenge

$$\{x \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1 \mid f(x) = 0\}$$

unendlich viele Elemente enthält und nicht ganz $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1$ ist.

- b) Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass die Vereinigung $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$ unendlich vieler affiner Varietäten V_λ im allgemeinen keine affine Varietät ist.

Aufgabe 29. (Affine Varietäten)

Welche der folgenden Teilmengen sind affine Varietäten?

- a) $\{t \in \mathbb{C} \mid |t| = 1\} \subset \mathbb{C} = \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$
- b) $\{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R} = \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1$
- c) $\{(\cos t, \sin t) \mid t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$
- d) $\{(t, t^2) \mid t \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{C}^2 = \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$

Finden Sie ggf. eine Darstellung $X = V(T)$ mit einer geeigneten Menge T von Polynomen.

Aufgabe 30. (Schnitt zweier ebener Kurven)

Seien $f, g \in K[x, y]$ teilerfremde Polynome. Zeigen Sie, dass $V(f, g)$ eine endliche Menge ist.

(Hinweis: Betrachten Sie f und g als Elemente in $K(x)[y]$ und überlegen Sie sich, dass es eine Darstellung $1 = pf + qg$ mit $p, q \in K(x)[y]$ gibt (Warum gibt es diese?).)

Literatur zur Algebraischen Geometrie:

- J. Harris*, Algebraic Geometry. A First Course, Springer-Verlag 1992.
- K. Hulek*, Elementare Algebraische Geometrie, Vieweg 2000.
- M. Reid*, Algebraic Geometry, Cambridge Univ. Press 1988.
- I. R. Shafarevich*, Basic Algebraic Geometry, Springer-Verlag 1994.

*Wir wünschen Ihnen ein frohes Weihnachtsfest
und ein erfolgreiches Jahr 2003!*