Übungen zur Algebra II, WS 2002/03

Abgabe am Donnerstag, den 16.01.2003 vor der Vorlesung

Aufgabe 31. *(Ideale von Punkten)*

a) Zeigen Sie, dass das Ideal der Menge $\{ a \}$ mit nur einem Punkt $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n$ gleich
$$(X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n)$$
ist. (Hinweis: Verschieben Sie a zuerst in den Nullpunkt.)

b) Es sei K ein Körper der Charakteristik 0 und $r \leq n$ eine natürliche Zahl. Weiterhin seien $L_1, \ldots, L_r$ Linearformen auf K^n. Bestimmen Sie das Ideal des durch $L_1, \ldots, L_r$ definierten linearen Unterraums (d.h. das Ideal der Varietät $\{ p \in \mathbb{A}^n \mid L_1(p) = \cdots = L_r(p) = 0 \}$).

Aufgabe 32. *(Komponentenzerlegung von Varietäten)*
Sei K ein Körper der Charakteristik 0. Wir betrachten das Ideal $J = (XY, XZ, YZ) \subset K[X, Y, Z]$.

a) Bestimmen Sie die Komponenten der Varietät $V(J)$.

b) Zeigen Sie, dass $I(V(J)) = J$ gilt.

Aufgabe 33. *(Radikale)*
Sei $J \subset K[X_1, \ldots, X_n]$ ein Ideal. Zeigen Sie:

a) $\sqrt{J}$ ist ein Ideal.

b) $\sqrt{\sqrt{J}} = \sqrt{J}$.

c) Ist J ein Primideal, so gilt $\sqrt{J} = J$.