# Übungen zur Algebra II, WS 2002/03

Abgabe am Donnerstag, den 23.01.2003 vor der Vorlesung

Auf dem gesamten Blatt bezeichnet $K$ einen algebraisch abgeschlossenen Körper.

**Aufgabe 34.** *(Radikalideal)*
Wir betrachten das Ideal $J = (X^3 + Y^3 - 1, X - 1) \subset K[X, Y, Z]$ und das Polynom $f = X^2 + Y^2 - 1$.

a) Bestimmen Sie die Nullstellenmenge von $J$.

b) Liegt $f$ im Radikal von $J$? Wenn ja: Geben Sie eine Potenz von $f$ an, die in $J$ liegt.

**Aufgabe 35.** *(Varietäten und Ideale)*

a) Es seien $I$ und $J$ Ideale in $K[X_1, \ldots, X_n]$ mit $I \subset \sqrt{J}$. Zeigen Sie, dass es eine natürliche Zahl $m$ gibt, so dass

$$I^m \subset J$$

gilt. (Hinweis: Betrachten Sie geeignete Erzeuger von $I^m$, welche Sie aus Erzeugern von $I$ gewinnen.)
Folgern Sie: Zu jedem Ideal $I$ in $K[X_1, \ldots, X_n]$ existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $(\sqrt{I})^m \subset I$.

b) Es seien $I$ und $J$ Ideale in $K[X_1, \ldots, X_n]$. Zeigen Sie: Die Varietäten $V(I)$ und $V(J)$ sind genau dann gleich, wenn es eine natürliche Zahl $m$ gibt mit

$$I^m \subset J \quad \text{und} \quad J^m \subset I\ .$$

**Aufgabe 36.** *(Beispiele für Morphismen)*
Für $n \geq 1$ sei die Abbildung $\varphi_n : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^2$ durch $t \mapsto (t^2, t^n)$ definiert.

a) Sei $n$ ungerade. Zeigen Sie, dass $\varphi_n : \mathbb{A}^1 \to \varphi_n(\mathbb{A}^1)$ bijektiv ist und geben Sie die Umkehrabbildung an.

b) Sei $n$ gerade. Zeigen Sie, dass $\varphi_n(\mathbb{A}^1)$ zu $\mathbb{A}^1$ isomorph ist. Ist $\varphi_n$ bijektiv?

| |
|---|
| Die **Klausur** zur Algebra II findet an folgendem Termin statt: |
| Donnerstag, 13.02.2003, 14:15-16:15 Uhr im HS B (Chemie). |