Übungen zur Algebra II, WS 2002/03

Abgabe am Donnerstag, den 30.01.2003 vor der Vorlesung

Auf dem gesamten Blatt arbeiten wir über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K.

Aufgabe 37. *(Affine Hyperbeln)*
Zeigen Sie, dass die Kurve $V(XY-1) \subset \mathbb{A}^2$ nicht zu $\mathbb{A}^1$ isomorph ist.

Aufgabe 38. *(Bild und Urbild von Polynomabbildungen)*
Es sei $f : V \to W$ eine Polynomabbildung zwischen den affinen Varietäten V und W.

a) Zeigen Sie, dass das Urbild $f^{-1}(U)$ einer Untervarietät $U \subset W$ eine Untervarietät von V ist. (Dies zeigt, dass alle Polynomabbildungen stetig bezüglich der Zariski-Topologie sind.)

b) Zeigen Sie, dass das Bild $f(V)$ im Allgemeinen keine Untervarietät von W ist.

(Hinweis: Bilden Sie die Hyperbel aus Aufgabe 37 auf geeignete Weise ab.)

Aufgabe 39. *(Isomorphismen)*
Sei $f : V \to W$ eine Polynomabbildung zwischen den affinen Varietäten V und W. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $f^* : K[W] \to K[V]$ ist surjektiv.

(ii) $f(V)$ ist eine Untervarietät von W, und f liefert einen Isomorphismus $V \to f(V)$.

(Hinweis: Für die Richtung (i) $\Rightarrow$ (ii) betrachten Sie das Ideal $\mathrm{kern} f^* \subset K[W]$.)