Übungen zur Algebra II, WS 2002/03

Abgabe am Donnerstag, den 06.02.2003 vor der Vorlesung

Auf dem gesamten Blatt arbeiten wir über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K.

Aufgabe 40. *(Definitionsbereich einer rationalen Funktion)*
Sei $V \subset \mathbb{A}^2$ die durch $Y^2 = X^2 + X^3$ definierte ebene Kurve und $f \in K(V)$ die rationale Funktion $(X,Y) \mapsto \frac{Y}{X}$.

a) Bestimmen Sie das Ideal von V.

b) Liegt f sogar in $K[V]$?

c) Geben Sie den Definitionsbereich von f an.

Aufgabe 41. *(Reguläre Funktionen auf der punktierten Ebene)*
Zeigen Sie, dass gilt:

$$\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2}(\mathbb{A}^2 \setminus \{\,(0,0)\,\}) = K[X,Y]\ .$$

Mit anderen Worten: Zeigen Sie, dass eine rationale Funktion $f \in K(\mathbb{A}^2)$, die auf $\mathbb{A}^2 \setminus \{\,(0,0)\,\}$ regulär ist, sogar auf ganz $\mathbb{A}^2$ regulär ist.

(Hinweis: Nutzen Sie, dass $K[\mathbb{A}^2]$ faktoriell ist.)

Aufgabe 42. *(Zentralprojektion der Kugel)*
Es sei $V = V(X^2 + Y^2 + Z^2 - 1)$ die Kugel im $\mathbb{A}^3$ und H die Hyperebene $H = V(Z)$. Sei weiterhin f die Zentralprojektion von V auf H ausgehend vom Punkt $p = (0,0,1)$, d.h. $f(v)$ ist der Schnittpunkt von H mit der Geraden durch v und p, z.B. ist $f(0,0,-1) = (0,0,0)$.
Zeigen Sie, dass $f : V \dashrightarrow H$ ein birationaler Morphismus ist.