Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps Universität Marburg
Prof. Dr. Th. Bauer, Chr. Schulz

Wintersemester 2002/03

Klausur zur Algebra II, WS 2002/03
Donnerstag, den 13.02.2003, **14.15 - 16.15 Uhr**

Name								
Matrikelnummer								
Tutorengruppe								
Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Erreichbare Punkte	10	10	10	10	10	$3+4+3$	$3+3+4$	70
Erreichte Punkte								

Füllen Sie bitte zuerst das Deckblatt aus und versehen Sie alle Blätter mit Ihrem Namen!
Bearbeiten Sie die Aufgaben auf den ausgegebenen Blättern. Sollte der Platz unter der Aufgabenstellung und auf der Rückseite des Aufgabenblattes nicht ausreichen, so benutzen Sie bitte die leeren Blätter am Ende der Klausur.
Geben Sie die Klausur möglichst nach Aufgaben geordnet und geheftet ab (ein Hefter befindet sich bei der Abgabestelle).
Es sind keinerlei Hilfsmittel zugelassen.

Wir wünschen viel Erfolg!

Aufgaben:

Aufgabe 1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Siehe dort!

Aufgabe 2. Wir betrachten eine Körpererweiterung $L \supset K$. Die Körperelemente $\alpha, \beta \in L$ seien algebraisch vom Grad m bzw. n über K. Weiterhin seien m und n teilerfremd. Beweisen Sie:

$$[K(\alpha, \beta) : K] = m \cdot n \ .$$

Aufgabe 3. Sei $L \supset K$ eine endliche normale Körpererweiterung und $M \supset L$ eine weitere Körpererweiterung.
Zeigen Sie, dass für jeden injektiven K-Körperhomomorphismus $\varphi : \ L \to M$ gilt:

$$\varphi(L) = L \ .$$

Aufgabe 4. Es sei $K = \{ 0, 1, \alpha, \beta \}$ der Körper mit 4 Elementen und P sein Primkörper. Bestimmen Sie $\mathrm{Gal}(K, P)$.

(Hinweis: Zeigen Sie zunächst $K = P(\alpha) = P(\beta)$.)

Aufgabe 5. Es sei $p = X^4 - 7X^2 + 10 \in \mathbb{Q}[X]$ und K der Zerfällungskörper von p. Bestimmen Sie sämtliche Zwischenkörper der Körpererweiterung $K \supset \mathbb{Q}$.

Aufgabe 6. Wir betrachten die affine Varietät $V = V(Z - XY) \subset \mathbb{A}^3$.

a) Bestimmen Sie $I(V)$.

b) Geben Sie einen Isomorphismus $f : \ \mathbb{A}^2 \to V$ an.

c) Geben Sie den zugehörigen Isomorphismus f^* der Koordinatenringe an.

Aufgabe 7. Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik $\neq 2$.

a) Bestimmen Sie $I(V(Y - X^2, Y + X^2)) \subset K[X, Y]$.

b) Zeigen Sie, dass die Menge
$$\{ (t^3, t^6, \ldots, t^{3n}) \,|\, t \in K \} \subset \mathbb{A}^n_K$$
eine affine Varietät ist.

c) Es sei $V = V(X) \subset \mathbb{A}^3_K$ und $W = V(X^2 + Y^2 - Z^2) \subset \mathbb{A}^3_K$. Ist die affine Varietät $V \cap W$ reduzibel oder irreduzibel?

Aufgabe 1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. **Kreuzen Sie die entsprechende Antwort an.** Es werden **keine** Begründungen verlangt. Jede richtig beantwortete Teilaufgabe bringt einen Punkt, jede falsch beantwortete Teilaufgabe ergibt einen Punkt Abzug. Nicht beantwortete Teile werden nicht gewertet.

1. Es sei $K \supset \mathbb{Q}$ eine Galoiserweiterung und $\alpha \in K$ algebraisch vom Grad 4 über $\mathbb{Q}$. Dann ist α konstruierbar über $\mathbb{Q}$. *richtig* □ *falsch* □

2. Sei $L \supset K$ eine algebraische Körpererweiterung. Ein Körperelement $\alpha \in L$ ist genau dann separabel über K, wenn die Ableitung des Minimalpolynoms von α nicht das Nullpolynom ist. *richtig* □ *falsch* □

3. Jede endliche Gruppe der Ordnung $n \leq 11$ ist auflösbar. *richtig* □ *falsch* □

4. Sei φ ein Automorphismus von $K[X_1, \ldots, X_n]$ und p ein symmetrisches Polynom. Dann ist $\varphi(p)$ ebenfalls ein symmetrisches Polynom. *richtig* □ *falsch* □

5. Sei K ein Körper der Charakteristik 0 und $f \in K[X]$ irreduzibel. Falls die Galoisgruppe von f abelsch ist, so ist f durch Radikale auflösbar. *richtig* □ *falsch* □

6. Jede affine Varietät $V \subset \mathbb{A}^n$ lässt sich als Nullstellenmenge endlich vieler irreduzibler Polynome beschreiben. *richtig* □ *falsch* □

7. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $J \subset K[X_1, \ldots, X_n]$ ein Primideal, dann gilt $I(V(J)) = J$. *richtig* □ *falsch* □

8. Der Definitionsbereich einer rationalen Abbildung $f : V \dashrightarrow W$ zwischen zwei affinen Varietäten ist eine Untervarietät von V. *richtig* □ *falsch* □

9. Zwischen zwei irreduziblen affinen Varietäten gibt es genau dann eine birationale Abbildung, wenn ihre Koordinatenringe isomorph sind. *richtig* □ *falsch* □

10. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0. Eine n-dimensionale affine Varietät $V \subset \mathbb{A}^n_K$ ist schon der ganze $\mathbb{A}^n_K$. *richtig* □ *falsch* □

Aufgabe 2. Wir betrachten eine Körpererweiterung $L \supset K$. Die Körperelemente $\alpha, \beta \in L$ seien algebraisch vom Grad m bzw. n über K. Weiterhin seien m und n teilerfremd. Beweisen Sie:

$$[K(\alpha, \beta) : K] = m \cdot n \ .$$

Aufgabe 3. Sei $L \supset K$ eine endliche normale Körpererweiterung und $M \supset L$ eine weitere Körpererweiterung.
Zeigen Sie, dass für jeden injektiven K-Körperhomomorphismus $\varphi: \ L \to M$ gilt:

$$\varphi(L) = L \ .$$

Aufgabe 4. Es sei $K = \{0, 1, \alpha, \beta\}$ der Körper mit 4 Elementen und P sein Primkörper. Bestimmen Sie $\mathrm{Gal}(K, P)$.

(Hinweis: Zeigen Sie zunächst $K = P(\alpha) = P(\beta)$.)

Aufgabe 5. Es sei $p = X^4 - 7X^2 + 10 \in \mathbb{Q}[X]$ und K der Zerfällungskörper von p. Bestimmen Sie sämtliche Zwischenkörper der Körpererweiterung $K \supset \mathbb{Q}$.

Aufgabe 6. Wir betrachten die affine Varietät $V = V(Z - XY) \subset \mathbb{A}^3$.

a) Bestimmen Sie $I(V)$.

b) Geben Sie einen Isomorphismus $f: \mathbb{A}^2 \to V$ an.

c) Geben Sie den zugehörigen Isomorphismus f^* der Koordinatenringe an.

Aufgabe 7. Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik $\neq 2$.

a) Bestimmen Sie $I(V(Y - X^2, Y + X^2)) \subset K[X, Y]$.

b) Zeigen Sie, dass die Menge

$$\{ (t^3, t^6, \ldots, t^{3n}) \mid t \in K \} \subset \mathbb{A}_K^n$$

eine affine Varietät ist.

c) Es sei $V = V(X) \subset \mathbb{A}_K^3$ und $W = V(X^2 + Y^2 - Z^2) \subset \mathbb{A}_K^3$. Ist die affine Varietät $V \cap W$ reduzibel oder irreduzibel?

Zusatz zu Aufgabe ...

Zusatz zu Aufgabe ...

Zusatz zu Aufgabe . . .

Zusatz zu Aufgabe ...