

Übungen zur Algebraischen Geometrie, WS 2003/04

Übung für das 1. Tutorium am 28.10.2003

Aufgabe 1. (Affine Varietäten 1)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

1. Die Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \text{ und } |z - 1| = 1\} \subset \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$ ist eine affine Varietät. richtig falsch
2. Die Vereinigung von beliebig vielen affinen Varietäten ist eine affine Varietät. richtig falsch
3. Es gilt $V(I(X)) = X$ für jede affine Varietät X . richtig falsch
4. Es gilt $I(V(J)) = J$ für jedes Ideal J . richtig falsch
5. Die affine Varietät $V(xy) \subset \mathbb{A}^2$ ist irreduzibel. richtig falsch
6. Die Varietät $V(xy - 1) \subset \mathbb{A}^2$ ist irreduzibel. richtig falsch
7. Das Ideal von $V(x^2) \subset \mathbb{A}^2$ ist ein Primideal. richtig falsch
8. Es gibt einen Morphismus (von Varietäten) $f : \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^2$ derart, dass $f^* : K[x, y] \rightarrow K[x, y]$ durch $x \mapsto xy$ und $y \mapsto y^2$ gegeben ist. richtig falsch
9. Die Bildmenge der Abbildung $V(xy - 1) \rightarrow \mathbb{C}, (x, y) \mapsto xy$ ist eine affine Varietät. richtig falsch
10. Die Projektion $V(xy - 1) \rightarrow \mathbb{C}, (x, y) \mapsto x$ ist birational. richtig falsch
11. Die Kurve $V(xy - 1) \subset \mathbb{A}^2$ ist glatt. richtig falsch
12. Die Kurve $V(xy) \subset \mathbb{A}^2$ ist glatt. richtig falsch

Aufgabe 2. (Affine Varietäten 2)

Wir betrachten die Varietät $X := V(xz - x^3 - xy^2, yz - x^2y - y^3) \subset \mathbb{A}^3$.

- a) Zerlegen Sie X in irreduzible Komponenten.
- b) Bestimmen Sie die Ideale der einzelnen Komponenten und das Ideal von X .
- c) Berechnen Sie die Dimension der Komponenten (die Komponente mit der kleinsten Dimension nennen wir X_1 , usw.). Sind die Komponenten glatt?
- d) Zeigen Sie, dass die rationale Abbildung $f : X_2 \dashrightarrow X_1, (x, y, z) \mapsto (0, 0, \frac{y}{z-x^2})$ wohldefiniert ist und berechnen Sie $\text{dom}(f)$. Ist $f(X_2 \setminus \text{dom}(f))$ eine Varietät? Ist f dominant?