Übungen zur Algebraischen Geometrie, WS 2003/04

Übung für das 2. Tutorium am 04.11.2003

Aufgabe 3. *(Projektive Transformationen der projektiven Ebene)*
Sei $A \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{K})$ eine invertierbare Matrix mit den Zeilen L_1, L_2, L_3 und $F : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$, $(x, y, z) \mapsto (L_1 \cdot (x, y, z), L_2 \cdot (x, y, z), L_3 \cdot (x, y, z))$ die zugehörige lineare Abbildung.

a) Zeigen Sie, dass F einen Isomorphismus

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{P}^2 & \to & \mathbb{P}^2 \\ (x_0 : x_1 : x_2) & \mapsto & (L_1 \cdot (x_0, x_1, x_2) : L_2 \cdot (x_0, x_1, x_2) : L_3 \cdot (x_0, x_1, x_2)) \end{array}$$

induziert - eine sogenannte *projektive Transformation*.

b) Seien $\{ p_1, p_2, p_3, p_4 \}$ und $\{ q_1, q_2, q_3, q_4 \}$ zwei Mengen von vier Punkten in $\mathbb{P}^2$, die die Eigenschaft besitzen, dass jeweils drei Punkte nicht auf einer (projektiven) Geraden liegen. Zeigen Sie, dass es eine eindeutige projektive Transformation T gibt mit $T(p_i) = q_i$, $i = 1, \ldots, 4$.

(Hinweis: Beginnen Sie mit den Punkten $p_1 = (1 : 0 : 0), p_2 = (0 : 1 : 0), p_3 = (0 : 0 : 1), p_4 = (1 : 1 : 1)$.)

c) Folgern Sie, dass es zu drei paarweise verschiedenen Geraden in der projektiven Ebene eine projektive Transformation gibt, so dass die Vereinigung der Geraden auf eine der Varietäten $V_1 = V(x_0 x_1 (x_0 - x_1))$ oder $V_2 = V(x_0 x_1 x_2)$ abgebildet wird.

Aufgabe 4. *(Projektive Varietäten)*
Sei $C := V(x_0^2 + x_1^2 - x_2^2) \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ und $H_2 := V(x_2)$. Betrachten Sie die Einbettung

$$\begin{array}{rcl} \iota : \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} & \to & \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \\ (x_0, x_1) & \mapsto & (x_0 : x_1 : 1) \ . \end{array}$$

a) Zeigen Sie, dass $\iota^{-1}(C)$ eine affine Kurve ist.

b) Bestimmen Sie $C \cap H_2$ - die „unendlich fernen Punkte“ von C.

c) Führen Sie a) und b) auch für die Kurven $C_{a,b,r} = V((x_0 - a x_2)^2 + (x_1 - b x_2)^2 - r^2 x_2^2)$ durch, wobei $a, b \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{C} \setminus \{ 0 \}$ gilt.

d) Bestimmen Sie alle Kurven $C = V(f) \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ mit $\deg f = 2$, die durch die Punkte $(1 : i : 0)$ und $(1 : -i : 0)$ gehen.

Aufgabe 5. *(Homogene Ideale)*

a) Seien I, J und I_λ für $\lambda \in \Lambda$ (Λ beliebige Indexmenge) homogene Ideale in einem graduierten Ring S. Zeigen Sie, dass dann auch die Ideale

$$I \cap J, \quad I \cdot J, \quad \sqrt{J}, \quad \sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$$

homogen sind.

(Hinweis: Benutzen Sie die jeweils günstigere der beiden äquivalenten definierenden Eigenschaften von homogenen Idealen.)

b) Beweisen Sie, dass ein homogenes Ideal I genau dann ein Primideal ist, wenn für alle homogenen Elemente a und b gilt: Aus $ab \in I$ folgt $a \in I$ oder $b \in I$.