**Übungen zur Algebraischen Geometrie, WS 2003/04**

Übung für das 3. Tutorium am **Donnerstag, den 13.11.2003**

**Aufgabe 6.** *(Euler-Formel)*
Beweisen Sie: Für homogene Polynome $F \in K[x_0, \ldots, x_n]$ vom Grad $d$ gilt

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_j} \cdot x_j = d \cdot F \ .$$

Hier bezeichnet $\frac{\partial}{\partial x_i}$ die *formale Ableitung* nach der Unbestimmten $x_i$.

**Aufgabe 7.** *(Zusammenhang zwischen affinen und projektiven Varietäten)*
Sei $X = V(F)$ eine Hyperfläche im $\mathbb{P}^n$ und $p \in X$. Zeigen Sie:

a) $X$ ist in $p$ genau dann singulär, wenn alle partiellen Ableitungen von $F$ in $p$ verschwinden, d.h.
$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(p) = 0 \quad \text{für alle } i = 0, \ldots, n \ .$$

b) Für den projektiven Tangentialraum gilt
$$\mathbb{T}_p X = V\left( \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(p) \cdot x_i \right) \ .$$

(Hinweis: Euler-Formel)

**Aufgabe 8.** *(Ebene Kurven 1)*
Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1 & \to & \mathbb{P}^2 \\ (x : y) & \mapsto & (x^2 : xy : y^2) \end{array}$$

wohldefiniert ist und dass ihr Bild eine ebene projektive Kurve ist.

**Aufgabe 9.** *(Ebene Kurven 2)*

a) Jedes homogene Polynom $F \in K[x, y]$ ist ein Produkt von Linearfaktoren.
(Hinweis: Zeigen Sie: Aus $F(a, b) = 0$ folgt, $(bx - ay)$ teilt $F$.)

b) Beweisen Sie: Für eine ebene Kurve $C$ vom Grad $d$ ist äquivalent:
   (i) $C$ hat einen Punkt $p$ der Multiplizität $d$.
   (ii) $C$ ist die Vereinigung von $d$ Geraden durch einen gemeinsamen Punkt $p$ (mit Vielfachheiten gezählt).