Übungen zur Algebraischen Geometrie, WS 2003/04

Übung für das 3. Tutorium am **Donnerstag, den 13.11.2003**

Aufgabe 6. *(Euler-Formel)*
Beweisen Sie: Für homogene Polynome $F \in K[x_0, \dots, x_n]$ vom Grad d gilt

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_j} \cdot x_j = d \cdot F \ .$$

Hier bezeichnet $\frac{\partial}{\partial x_i}$ die *formale Ableitung* nach der Unbestimmten x_i.

Aufgabe 7. *(Zusammenhang zwischen affinen und projektiven Varietäten)*
Sei $X = V(F)$ eine Hyperfläche im $\mathbb{P}^n$ und $p \in X$. Zeigen Sie:

a) X ist in p genau dann singulär, wenn alle partiellen Ableitungen von F in p verschwinden, d.h.

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(p) = 0 \quad \text{für alle } i = 0, \dots, n \ .$$

b) Für den projektiven Tangentialraum gilt

$$\mathbb{T}_p X = V\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(p) \cdot x_i\right) \ .$$

(Hinweis: Euler-Formel)

Aufgabe 8. *(Ebene Kurven 1)*
Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1 & \to & \mathbb{P}^2 \\ (x:y) & \mapsto & (x^2 : xy : y^2) \end{array}$$

wohldefiniert ist und dass ihr Bild eine ebene projektive Kurve ist.

Aufgabe 9. *(Ebene Kurven 2)*

a) Jedes homogene Polynom $F \in K[x, y]$ ist ein Produkt von Linearfaktoren.
(Hinweis: Zeigen Sie: Aus $F(a, b) = 0$ folgt, $(bx - ay)$ teilt F.)

b) Beweisen Sie: Für eine ebene Kurve C vom Grad d ist äquivalent:

(i) C hat einen Punkt p der Multiplizität d.

(ii) C ist die Vereinigung von d Geraden durch einen gemeinsamen Punkt p (mit Vielfachheiten gezählt).