Übungen zur Algebraischen Geometrie, WS 2003/04

Übung für das 4. Tutorium am 18.11.2003

Aufgabe 11. *(Kegelschnitte)*
Sei $\mathrm{char}(K) \neq 2$ und $C \subset \mathbb{P}^2_K$ eine Kurve vom Grad 2 *(Kegelschnitt)*. Zeigen Sie, dass das definierende Polynom von C in der Form

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

mit einer symmetrischen Matrix $A \in M_3(K)$ geschrieben werden kann und dass C genau dann glatt ist, wenn A invertierbar ist.

Aufgabe 12. Gegeben sei eine Polynomabbildung

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{C} &\to \mathbb{C}^2 \\ t &\mapsto (f(t), g(t)) \; . \end{aligned}$$

Finden Sie eine Abschätzung (nach oben) für den Grad der Kurve $\varphi(\mathbb{C})$.

Aufgabe 13. Sei $\mathrm{char}(K) = 0$ und $C = V(F) \subset \mathbb{P}^2_K$ eine Kurve vom Grad d.
Zeigen Sie

a) Eins der Polynome $\frac{\partial F}{\partial x_0}$, $\frac{\partial F}{\partial x_1}$ oder $\frac{\partial F}{\partial x_2}$ ist nicht das Nullpolynom.

b) Die Kurve C besitzt nur endlich viele Singularitäten und es gilt

$$\sum_{p \in \mathbb{P}^2} (\mathrm{mult}_p(C) \cdot (\mathrm{mult}_p(C) - 1)) \leq d \cdot (d-1) \; .$$

(Hinweis: Satz von Bézout für $V(F)$ und $V\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)$.)