Übungen zur Algebraischen Geometrie, WS 2003/04

Übung für das 5. Tutorium am 25.11.2003

Aufgabe 14. *(Tangentialkegel und Schnittmultiplizitäten)*
Sei $C \subset \mathbb{P}^2$ das dreiblättrige und $D \subset \mathbb{P}^2$ das vierblättrige Kleeblatt (siehe Vorlesung).

a) Geben Sie die Tangentialkegel von C und D im Punkt $q = (1 : 0 : 0)$ an.

b) Bestimmen Sie die Schnittmultiplizitäten

$$I(C, D, q) \ , \quad I(C, V(x_2), q) \ , \quad I(D, V(x_2), q) \ .$$

Aufgabe 15.

a) Gegeben seien zwei ebene Kurven $C, D \subset \mathbb{P}^2$. Zeigen Sie, dass gilt

$$C \cap D \neq \emptyset \ .$$

b) Zeigen Sie, dass jede glatte ebene Kurve $C \subset \mathbb{P}^2$ irreduzibel ist.

Aufgabe 16.
Seien $C_1, C_2 \subset \mathbb{P}^2$ zwei ebene Kurven vom Grad n, die sich in n^2 verschiedenen Punkten schneiden. Zeigen Sie:
Falls $D \subset \mathbb{P}^2$ eine irreduzible Kurve vom Grad $m < n$ ist, die genau $m \cdot n$ dieser Punkte enthält, dann existiert eine Kurve $E \subset \mathbb{P}^2$ vom Grad $n - m$, die die restlichen $n^2 - m \cdot n$ Punkte enthält.

(Hinweis: Gehen Sie vor wie im Beweis von *Pascal's Hexagon.)*