Übungen zur Algebraischen Geometrie, WS 2003/04

Übung für das 7. Tutorium am 09.12.2003

Aufgabe 20. *(Linearsysteme 1)*
Zeigen Sie, dass es genau einen Kegelschnitt durch die fünf Punkte

$$(0:0:1), (1:0:0), (0:1:0), (1:1:1) \text{ und } (1:2:3)$$

gibt. Ist dieser glatt?

Aufgabe 21. *(Linearsysteme 2)*
Es sei eine irreduzible Kubik $C \subset \mathbb{P}^2$ und neun paarweise verschiedene Punkte $p_1, \ldots, p_9 \in C$ gegeben. Zeigen Sie:

$$\dim |3H - p_1 - \cdots - p_9| \leq 1$$

(Hinweis: Nehmen Sie das Gegenteil an und konstruieren Sie einen Widerspruch.)

Aufgabe 22. *(Divisoren mit mehrfachen Punkten)*

a) Sei $C \subset \mathbb{P}^2$ eine irreduzible Kurve vom Grad d. Zeigen Sie:

$$\sum_{p \in \mathbb{P}^2} \frac{\operatorname{mult}_p(C) \cdot (\operatorname{mult}_p(C) - 1)}{2} \leq \frac{(d-1) \cdot (d-2)}{2} .$$

(Hinweis: Nutzen Sie das Ergebnis von Aufgabe 13 um einen Divisor D vom Grad $d-1$ zu konstuieren mit $\operatorname{mult}_p(D) \geq \operatorname{mult}_p(C) - 1$ und zusätzlichen Bedingungen.)

b) Sei $C \subset \mathbb{P}^2$ eine Kurve vom Grad d mit c verschiedenen Komponenten. Zeigen Sie:

$$\sum_{p \in \mathbb{P}^2} \frac{\operatorname{mult}_p(C) \cdot (\operatorname{mult}_p(C) - 1)}{2} \leq \frac{(d-1) \cdot (d-2)}{2} + c - 1 .$$

(Hinweis: Induktion nach c.)

Aufgabe 23. *(Satz von Pappos)*
Beweisen Sie den Satz von Pappos (siehe Vorlesung).

Aufgabe 24. *(Umkehrung des Satzes von Pascal)*
Beweisen Sie die Umkehrung des Satzes von Pascal (siehe Vorlesung).