Übungen zur Algebraischen Geometrie, WS 2003/04

Übung für das 7. Tutorium am 16.12.2003

Aufgabe 25. *(Divisoren von hohem Grad)*
Es seien paarweise verschiedene Punkte $p_1, \ldots, p_r \in \mathbb{P}^2$ und natürliche Zahlen $m_1, \ldots, m_r$ gegeben. Zeigen Sie:

a) Es existiert ein $d_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $d \geq d_0$ das Linearsystem $|dH - \sum_{i=1}^r m_i p_i|$ den Basisort $\{ p_1, \ldots p_r \}$ besitzt.

b) Es existiert ein $d_1 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $d \geq d_1$ die Abbildung $\varphi_{|dH - \sum_{i=1}^r m_i p_i|}$ injektiv ist.

(Hinweis: Betrachten Sie die Dimensionen der Linearsysteme $|dH - \sum_{i=1}^r m_i p_i - p|$, bzw. $|dH - \sum_{i=1}^r m_i p_i - p - q|$ für $p, q \in \mathbb{P}^2$.)

Aufgabe 26. *(Entfernen des Basisdivisors)*
Es seien zwei Divisoren $D_1 = \sum a_i C_i$ und $D_2 = \sum b_i C_i$ gegeben. D_2 heißt größer als D_1 ($D_1 \prec D_2$), wenn $a_i \leq b_i$ für alle i gilt.
Sei P ein Linearsystem auf $\mathbb{P}^2$ und B der Basisort von P. Wir betrachten den Basisdivisor von P, d.h. den größten effektiven Divisor $F \in P$ mit $F \prec D$ für alle $D \in P$ (evtl. $F = 0$). Zeigen Sie

a) $P - F := \{ D - F \mid D \in P \}$ ist ein Linearsystem mit $\dim(P - F) = \dim P$.

b) Der Basisort B' von $P - F$ ist endlich.

c) Die Abbildung $\varphi_{P-F} : \mathbb{P}^2 \setminus B' \to \mathbb{P}^N$ ist eine Fortsetzung von $\varphi_P : \mathbb{P}^2 \setminus B \to \mathbb{P}^N$.

Aufgabe 27. Es seien drei nicht kollineare Punkte $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{P}^2$ gegeben. Wir betrachten das Linearsystem $P = |2H - p_1 - p_2 - p_3|$.

a) Bestimmen Sie den Basisort von P.

b) Finden Sie die kleinste abgeschlossene Menge $T \subset \mathbb{P}^2$, so dass $\varphi_P : \mathbb{P}^2 \setminus T \to \mathbb{P}^2$ injektiv ist.

c) Seien nun $p_1 = (1:0:0)$, $p_2 = (0:1:0)$ und $p_3 = (0:0:1)$. Bestimmen Sie die Bildmenge $\varphi_P(\mathbb{P}^2 \setminus T)$ für eine Wahl der Basis des Linearsystems.