Übungen zur Algebraischen Geometrie, WS 2003/04

Übung für das 9. Tutorium am 13.01.2004

Aufgabe 28. *(Wiederholung Linearsysteme)*
Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

1. Ist $C \subset \mathbb{P}^2$ eine Kurve, so ist die generische Gerade keine Komponente von C.
   richtig □ *falsch* □

2. Das generische Element von $|dH|$ verläuft durch den Punkt $(1:0:0)$.
   richtig □ *falsch* □

3. Das generische Element von $|2H|$ ist glatt. *richtig* □ *falsch* □

4. Das System $|100H - 100p|$ besteht aus genau einem Divisor. *richtig* □ *falsch* □

5. Das System $|H - p - q|$ hat den Basisort $\{ p, q \}$. *richtig* □ *falsch* □

6. Sind C und D Kubiken in $\mathbb{P}^2$ mit neun Schnittpunkten $p_1, \ldots, p_9$, dann hat $|3H - p_1 - \cdots - p_9|$ den Basisort $\{ p_1, \ldots, p_9 \}$. *richtig* □ *falsch* □

7. Sind C und D Kubiken in $\mathbb{P}^2$ mit neun Schnittpunkten $p_1, \ldots, p_9$, dann hat $|3H - p_1 - \cdots - p_8|$ den Basisort $\{ p_1, \ldots, p_9 \}$. *richtig* □ *falsch* □

8. Durch fünf Punkte in $\mathbb{P}^2$ gibt es genau einen Kegelschnitt. *richtig* □ *falsch* □

9. Ein Büschel in $|dH|$ hat höchstens d^2 Basispunkte. *richtig* □ *falsch* □

10. Die Elemente aus $|2H|$, die durch den Punkt $(0:0:1)$ gehen und dort die Tangente $V(x_0)$ besitzen, bilden ein Linearsystem. ($D = K \cdot f \in |2H|$ hat die Tangente $V(x_0)$ in $(0:0:1)$ genau dann, wenn die Taylor-Entwicklung von $f(x_0, x_1, 1)$ in $(0:0:1)$ mit dem Term ax_0, $a \in K^*$ beginnt.) *richtig* □ *falsch* □

11. Das Linearsystem $|5H - p_1 - \cdots - p_6|$ hat Kodimension 6 in $|5H|$.
    richtig □ *falsch* □

12. Das Linearsystem $|5H - p_1 - \cdots - p_7|$ hat Kodimension 7 in $|5H|$.
    richtig □ *falsch* □

Aufgabe 29. *(Aussagen über das generische Element)*

a) Sei $f = \sum_{i=0}^{d} u_i x^i \in K[u_0, \ldots, u_d][x]$. Zeigen Sie, dass die Diskriminante von f (als Polynom in x) ein homogenes Polynom in $u_0, \ldots, u_d$ vom Grad $2d - 1$ ist.

b) Formalisieren und beweisen Sie die folgende Aussage: Das generische Polynom vom Grad d in $K[x]$ hat keine mehrfachen Nullstellen.

Aufgabe 30. *(Schnittmultiplizitäten)*
Sei $p = (0 : 0 : 1) \in \mathbb{P}^2$. Berechnen Sie die folgenden Schnittmultiplizitäten:

a) $I_p(V(x^2 - y^2), V(x^2 + y^2))$,

b) $I_p(V(x^5 + y^5 + xz^4), V(2x^{10} + y^2 z^8))$,

c) $I_p(V(x), V(x^{10} + y^5 z^5 + xz^9))$.

Aufgabe 31. *(Rationale Abbildungen)*
Es sei $C = V(xz - y^2) \subset \mathbb{P}^2$. Wir betrachten den Isomorphismus

$$\begin{array}{rcl} f: \ \mathbb{P}^2 & \to & C \\ (u : v) & \mapsto & (u^2 : uv : v^2) \end{array}$$

aus Aufgabe 8. Zeigen Sie, dass die Umkehrabbildung f^{-1} eine rationale Abbildung ist, sich aber nicht auf ganz C einheitlich in der Form $(x : y : z) \mapsto (f(x, y, z) : g(x, y, z))$ mit zwei Polynomen $f, g \in K[x, y, z]_d$ schreiben lässt.

(Hinweis: Ein möglicher Lösungsweg ist, zu zeigen, dass f und g immer eine gemeinsame Nullstelle besitzen müssen, indem man wie folgt vorgeht:

(i) Zu $f, g \in K[x, y, z]_d$ mit $\frac{f}{g} = \frac{x}{y} \in K(C)$ existieren Polynome $p, q \in K[x, y, z]$ mit $f = xp + yq$ und $g = yp + zq$ (in $K[x, y, z]$).

(ii) Bertachte die Schnittpunkte von $V(f)$ und C.)