Übungen zur Algebraischen Geometrie, WS 2003/04

Übung für das 10. Tutorium am 20.01.2004

Aufgabe 32. *(Rationale Abbildungen)*
Zeigen Sie, dass jede rationale Abbildung $\varphi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^n$ regulär ist.

Aufgabe 33. *(Projektive Transformationen mit vorgegebenen Punkten)*
Gegeben seien zwei Mengen von $n+2$ Punkten

$$\{ p_1, \dots, p_{n+2} \} \subset \mathbb{P}^n \quad \text{und} \quad \{ q_1, \dots, q_{n+2} \} \subset \mathbb{P}^n$$

mit der Eigenschaft, dass jeweils $n+1$ Punkte nicht in einer gemeinsamen Hyperebene liegen. Zeigen Sie, dass es eine projektive Transformation $\varphi_A : [x] \mapsto [Ax]$ gibt mit $\varphi_A(p_i) = q_i$, $i = 1, \dots, n+2$.

Aufgabe 34. *(Die Cayley-Kubik)*
Es sei $X \subset \mathbb{P}^3$ eine irreduzible Kubik mit mindestens vier Singularitäten, die nicht alle in ein einer Ebene liegen. Zeigen Sie, dass es bis auf projektive Äquivalenz nur eine solche Kubik gibt, nämlich die mit der Gleichung

$$x_0x_1x_2 + x_0x_1x_3 + x_0x_2x_3 + x_1x_2x_3 = 0 \ .$$

Insbesondere besitzt X dann *genau* vier Singularitäten ($\mathrm{char}(K) \neq 2$).

(Hinweis: Nach einer projektiven Transformation dürfen Sie vier singuläre Punkte in für Sie günstiger Lage annehmen. Überlegen Sie dann, was sich über die Gleichung von X sagen lässt.)

Aufgabe 35. *(Veronese-Abbildung)*
Wir betrachten die Monome vom Grad d

$$y_{i_0,\dots,i_n} := x_0^{i_0} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \ , \quad i_0 + i_1 + \cdots + i_n = d \ .$$

Die rationale Abbildung $v_d : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^N$, $[x_0 : \cdots : x_n] \mapsto [y_{d,0,\dots,0} : \cdots : y_{0,\dots,0,d}]$ (Abzählung beliebig aber fest gewählt) mit $N = \binom{n+d}{d} - 1$ nennen wir *Veronese-Abbildung vom Grad d*. Zeigen Sie, dass $V := v_d(\mathbb{P}^n)$ eine projektive Varietät und v_d ein Isomorphismus $\mathbb{P}^n \to V$ ist.

Aufgabe 36. *(Affine Teilmengen von projektiven Varietäten)*
Sei $X \subset \mathbb{P}^n$ eine projektive Varietät und $Y \subset \mathbb{P}^n$ eine Hyperfläche. Zeigen Sie, dass $X \setminus Y$ zu einer affinen Varietät isomorph ist. („$X \setminus Y$ ist affin.“)

(Hinweis: Betrachten Sie das Bild von $X \setminus Y$ unter der Veronese-Abbildung vom geeigneten Grad.)