Übungen zur Algebraischen Geometrie, WS 2003/04

Übung für das 12. Tutorium am 03.02.2004

Aufgabe 41. *(Duale Kurven)*
Wir betrachten die zu $\mathbb{P}^2$ *duale Ebene*

$$(\mathbb{P}^2)^* := \{ \text{ alle Geraden in } \mathbb{P}^2 \ \} \ .$$

Indem wir die Gerade $V(a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2) \in (\mathbb{P}^2)^*$ mit dem Punkt $(a_0 : a_1 : a_2) \in \mathbb{P}^2$ identifizieren, können wir $(\mathbb{P}^2)^*$ wieder als $\mathbb{P}^2$ auffassen. Zeigen Sie:

a) Für eine glatte Kurve $C \subset \mathbb{P}^2$ ist die *Gauß-Abbildung*

$$\begin{aligned} \varphi_C \ : C &\rightarrow (\mathbb{P}^2)^* \cong \mathbb{P}^2 \\ p &\mapsto \mathbb{T}_p C \end{aligned}$$

ein Morphismus. Das Bild $C^* := \varphi_C(C)$ nennt man die zu C *duale Kurve.*

b) Für einen Kegelschnitt C ist die duale Kurve C^* ebenfalls ein Kegelschnitt, und es gilt $(C^*)^* = C$.

c) Drei Geraden $L_1, L_2, L_3 \subset \mathbb{P}^2$ sind genau dann kollinear als Punkte in $(\mathbb{P}^2)^*$, wenn sie durch einen gemeinsamen Punkt $p \in L_1 \cap L_2 \cap L_3$ verlaufen.

d) Zu fünf Geraden $L_1, \ldots, L_5 \subset \mathbb{P}^2$, von denen jeweils drei nicht durch einen gemeinsamen Punkt gehen, gibt es einen Kegelschnitt $C \subset \mathbb{P}^2$, der diese Geraden als Tangenten besitzt.

Aufgabe 42. *(Aufblasen von Singularitäten)*
Es sei $\pi : \mathrm{Bl}_{(0,0)}\mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^2$ die Aufblasung von $\mathbb{A}^2$ im Nullpunkt. Die *eigentlich Transformierte* einer Kurve $C \subset \mathbb{A}^2$ sei $C' := \overline{\pi^{-1}(C \setminus \{ 0 \}} \subset \mathrm{Bl}_{(0,0)}\mathbb{A}^2$. Berechnen Sie die eigentlich Transformierten der folgenden Kurven. Sind diese glatt?

a) $C = V(y^2 - x^3)$,

b) $D = V((x^2 + y^2)^3 - 4x^2y^2)$.

Aufgabe 43. *(Der exzeptionelle Divisor)*
Sei $X = V(f) \subset \mathbb{A}^n$ eine Hyperfläche, p ein Punkt auf X und

$$\pi : \mathrm{Bl}_p X \rightarrow X$$

die Aufblasung von X in p. Zeigen Sie, dass der exzeptionelle Divisor $\pi^{-1}(p)$ gleich

$$\mathbb{P}\mathrm{TC}_p(X) := V(f_p^{in}) \subset \mathbb{P}^{n-1}$$

ist. (f_p^{in} bezeichnet den homogenen Teil von $f(x + p)$ mit kleinstem Grad.)