**Übungen zur Algebraischen Geometrie, WS 2003/04**

Übung für das 13. Tutorium am 10.02.2004

**Aufgabe 44.** *(Komplemente von Hyperflächen)*

a) Sei $H$ eine Hyperfläche in $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$. Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \setminus H$ zusammenhängend ist.

(Hinweis: Suchen Sie zu zwei Punkten $a, b \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \setminus H$ einen stetigen Verbindungsweg auf der komplexen Verbindungsgerade von $a$ und $b$.)

b) Verallgemeinern Sie die Aussage aus a) auf den $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$.

**Aufgabe 45.** *(Dimensionsbegriff)*

a) Sei $X \neq \mathbb{P}^n$ eine projektive Varietät im $\mathbb{P}^n$, $H \subset \mathbb{P}^n$ eine Hyperebene und $p \in \mathbb{P}^n \setminus (X \cup H)$ ein Punkt. Wir betrachten die Projektion auf $H$ ausgehend von $p$

$$\pi : X \rightarrow H .$$

Zeigen Sie, dass die Fasern $\pi^{-1}(y)$ für alle $y \in H$ endlich sind.

b) Sei $X \neq \emptyset$ eine projektive Varietät im $\mathbb{P}^n$. Beweisen Sie

$$\dim X = \max \left\{ c \in \mathbb{N} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{Jeder projektive Unterraum der Kodimension } c \\ \text{besitzt einen nichtleeren Schnitt mit } X. \end{array} \right\} .$$

(Hinweis: Man kann zeigen, dass aus Aufgabenteil a) folgt: $\dim X = \dim \pi(X)$. Dieses Ergebnis dürfen Sie in Teil b) benutzen.)

**Aufgabe 46.** *(Dimension von Hyperflächenschnitten)*
Es sei $X \subset \mathbb{P}^n$ eine irreduzible projektive Varietät der Dimension $d \geq 1$ und $H \subset \mathbb{P}^n$ eine Hyperfläche, die $X$ nicht enthält. Zeigen Sie, dass der Durchschnitt $X \cap H$ die Dimension $d - 1$ hat.

(Hinweis: Nutzen Sie die Veronese-Abbildung, um das Problem darauf zu reduzieren, dass $H$ eine Hyperebene ist. Benutzen Sie dann das Ergebnis von Aufgabe 45 b.)