Übungen zur Algebraischen Geometrie, WS 2003/04

Übung für das 14. Tutorium am 17.02.2004

Aufgabe 47. *(Geraden auf Kubiken)*
Wir betrachten die Kubik

$$X = V(x_0^2x_3 + x_1^2(x_2 + x_3) + x_2^2(4x_2 - 4x_3) + x_3^2(x_3 - x_2)) \subset \mathbb{P}^3 \ .$$

a) Zeigen Sie, dass X glatt ist.

b) Die Gerade $G_1 = V(x_2, x_3)$ liegt offenbar auf X. Finden Sie mindestens 10 weitere Geraden, die auch auf X liegen.

   (Hinweis: Suchen Sie für $\lambda \in K$ Geraden in der Ebene $E_\lambda = V(x_3 - \lambda x_2)$, indem Sie untersuchen, wann die Menge $Q_\lambda = X \cap E_\lambda$ in drei Geraden zerfällt.)

Aufgabe 48. *(Singuläre Kubiken)*
Es sei $X \subset \mathbb{P}^3$ eine Kubik und $p \in X$ ein singulärer Punkt. Zeigen Sie, daß auf X eine Gerade liegt, die durch p geht.

(Hinweis: Nach einer projektiven Transformation dürfen Sie $p = (1 : 0 : 0 : 0)$ annehmen. Überlegen Sie sich dann, dass man die Gleichung von X in der Form $x_0 \cdot g(x_1, x_2, x_3) + h(x_1, x_2, x_3)$ schreiben kann.)

Aufgabe 49. *(Fermat-Hyperflächen)*

a) Es sei d eine natürliche Zahl und $\mathrm{char}(K)$ kein Teiler von d. Zeigen Sie, dass die *Fermat-Hyperfläche vom Grad d*

   $$X = V(x_0^d + \cdots + x_n^d) \subset \mathbb{P}^n$$

   glatt ist.

b) Nun betrachten wir den Spezialfall $n = 3$. Dann ist $X \subset \mathbb{P}^3$ die *Fermat-Fläche vom Grad* $d \geq 3$. Zeigen Sie, dass X genau $3d^2$ Geraden enthält.

   (Hinweis: Untersuchen Sie, welche der Geraden $L_{a_2,a_3,b_2,b_3} = V(x_0 = a_2x_2 + a_3x_3, x_1 = b_2x_2 + b_3x_3)$ auf X liegen und permutieren Sie dann die Koordinaten.)