Übungen zur Analysis I, WS 2000/01

Präsenzübung für das erste Tutorium

Aufgabe 1. *(Abbildungen)*
Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und A sowie B Teilmengen von Y.
Die Menge $f^{-1}(A) := \{x \in X \mid f(x) \in A\}$ heißt das *Urbild von A unter f*. Zeigen Sie:

a) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
b) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

Aufgabe 2. *(Vollständige Induktion)*
Beweisen Sie die folgenden Aussagen mittels vollständiger Induktion:

a) Es gilt $2^n \geq n^2$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq 4$.
b) Für alle natürlichen Zahlen n gilt $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4}n^2\,(n+1)^2$.

Aufgabe 3. *(„Unvollständige“ Induktion)*
Gegeben sei ein verschlossener Sack mit n verschiedenfarbigen nummerierten Kugeln.
Behauptung (ohne den Sack zu öffnen): Alle Kugeln haben die gleiche Farbe.
Beweis (durch Induktion nach $n \geq 1$):
Induktionsanfang $n = 1$: In einem Sack mit einer Kugel haben sicher alle Kugeln die gleiche Farbe.
Induktionsschritt: Mit a_i bezeichnen wir die Farbe der i-ten Kugel. Wir nehmen an, die Aussage gelte für eine natürliche Zahl n. Nun seien $n+1$ Kugeln gegeben. Diese $n+1$ Kugeln teilen wir in die n-elementige Teilmengen

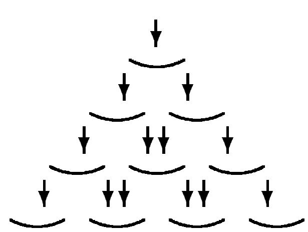
$$1, 2, \ldots, n \qquad \text{und} \qquad 2, 3, \ldots, n+1 \;\; .$$

Nach Induktionannahme gilt $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ und $a_2 = a_3 = \ldots = a_{n+1}$. Da a_2 in beiden Teilmengen enthalten ist, gilt somit $a_1 = a_2 = \ldots = a_{n+1}$.

q.e.d.

Da wir uns alle einen Sack mit wirklich verschiedenfarbigen Kugeln vorstellen können, kann die Behauptung nicht stimmen. Finden Sie den Fehler in der Beweisführung.

Aufgabe 4. *(Binomialkoeffizienten)*
Der künstliche Wasserfall im Trump Tower in New York City hat (stark idealisiert) den folgenden Aufbau.



Aus jeder Schale läuft jeweils die Hälfte des Wassers in die beiden darunterliegenden der nächsten Ebene. In die oberste Ebene fließen 10 Liter Wasser pro Sekunde. Berechnen Sie das Volumen des Wassers, das pro Sekunde in die k-te Schale der n-ten Ebene fließt.