Übungen zur Analysis I, WS 2000/01

Abgabe am 27.10.2000 in der Vorlesung

Aufgabe 5. *(Logiksymbole)*

a) Formulieren Sie die folgenden Aussagen in Worten und entscheiden Sie, ob sie zutreffen oder nicht.

   (i) $\forall\, x \in \mathbb{R}\; \exists\, y \in \mathbb{R} : x < y^2$.

   (ii) $\exists\, x \in \mathbb{R}\; \forall\, y \in \mathbb{R} : x < y^2$.

   (iii) $\forall\, x, y \in \mathbb{R} : x > y \Rightarrow x^2 > y^2$.

b) Formulieren Sie die folgenden Aussagen mit Logiksymbolen und entscheiden Sie, ob sie zutreffen oder nicht.

   (i) Für jede reelle Zahl x gibt es eine natürliche Zahl n, die größer als x ist.

   (ii) Für alle reellen Zahlen x und y ist das Quadrat der Summe von x und y größer als die Summe der Quadrate von x und y.

   (iii) Jede reelle Zahl ist höchstens so groß wie ihr Quadrat.

Aufgabe 6. *(Mengen)*
Es seien $A_1, \ldots, A_n$ und B Mengen. Zeigen Sie, dass gilt:

a) $B \setminus (\bigcup_{i=1}^n A_i) = \bigcap_{i=1}^n (B \setminus A_i)$,

b) $(\bigcup_{i=1}^n A_i) \cap B = \bigcup_{i=1}^n (A_i \cap B)$.

Aufgabe 7. *(Vollständige Induktion)*
Sei $q \neq 1$ eine reelle Zahl. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion:
Für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\prod_{k=0}^{n} \left(1 + q^{\left(2^k\right)}\right) = \frac{q^{\left(2^{n+1}\right)} - 1}{q - 1} \quad .$$

Aufgabe 8. (mündlich) *(Abbildungen)*
Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und A sowie B Teilmengen von X.
Mit $f(A) := \{f(a) \mid a \in A\}$ bezeichnen wir das Bild von A unter f. Beweisen Sie:

a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

b) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

c) $f(A) \subset f(B)$, falls $A \subset B$

d) Zeigen Sie durch Angabe eines Gegenbeispiels, dass im allgemeinen die Gleichung $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ nicht gilt.

Bücher zur Analysis I:

- O. Forster: Analysis 1. Viehweg 1996.
- H. Heuser: Lehrbuch der Analysis, Teil 1. Teubner 1998.
- K. Königsberger: Analysis 1. Springer 1995.
- W. Walter: Analysis 1. Springer 1997.
- O. Kerner: Mathematik-Lexikon. Viehweg 1995.