Übungen zur Analysis I, WS 2000/01

Abgabe am 12.01.2001 vor der Vorlesung

Aufgabe 45. *(Dreiecksungleichung der Supremumsnorm)*
Es sei $D \subset \mathbb{R}$ und seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ beschränkte Funktionen. Zeigen Sie, dass für die Supremumsnorm $||f|| := \sup\{|f(x)| \mid x \in D\}$ die Dreiecksungleichung

$$||f+g|| \leq ||f|| + ||g||$$

gilt.

Aufgabe 46. *(Rechnen mit gleichmäßig konvergenten Funktionenfolgen)*
Sei $D \subset \mathbb{R}$ und seien $f_n, g_n : D \to \mathbb{R}$ Funktionen, so dass die Funktionenfolgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ bzw. $g : D \to \mathbb{R}$ konvergieren. Beweisen Sie:

a) Die Funktionenfolge $(f_n + g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen $f + g$.

b) Für eine beliebige reelle Zahl c konvergiert die Funktionenfolge $(c \cdot f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $c \cdot f$.

Aufgabe 47. *(Punktweise/Gleichmäßige Konvergenz)*
Überprüfen Sie, ob bei den nachstehenden Funktionenfolgen punktweise oder gleichmäßige Konvergenz vorliegt (und geben Sie die Grenzfunktionen an):

a) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ; \quad x \mapsto x + \frac{1}{n}$,

b) $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ; \quad x \mapsto (x + \frac{1}{n})^2$,

c) $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ; \quad x \mapsto \frac{nx}{1+n^2x^2}$.

Aufgabe 48. (mündlich) *(Supremumsnorm)*

a) Berechnen Sie für die folgenden Funktionen die Supremumsnorm:

   1) $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

   2) $\exp : [0,1] \to \mathbb{R}$,

   3) $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

b) Sei $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ;\ x \mapsto \frac{nx}{1+n^2x^2}$ wie in Aufgabe 47 definiert. Zeigen Sie $||h_n|| = \frac{1}{2}$.