Übungen zur Analysis I, WS 2000/01

Abgabe 29.-31.01.2001 in den Tutorien

Aufgabe 49. *(Funktionenreihen)*
Wir betrachten die Reihe

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n} \qquad \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \ .$$

a) Für welche x ist sie absolut konvergent?

b) Auf welchen Intervallen konvergiert sie gleichmäßig? (Hinweis: Benutzen Sie das Weierstraß-Kriterium zusammen mit dem Quotientenkriterium.)

c) Wo ist f stetig?

Aufgabe 50. *(Konvergenzradius)*
Sei eine Folge reeller Zahlen $a_n \neq 0$ gegeben. Beweisen Sie das folgende Kriterium für den Konvergenzradius R der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$:
Falls der Limes $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ existiert, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \begin{cases} 0 & \text{, falls } R = \infty \\ \infty & \text{, falls } R = 0 \\ \frac{1}{R} & \text{, sonst} \end{cases} .$$

(Hinweis: Quotientenkriterium für $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$.)

Aufgabe 51.

a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius R der Potenzreihe $f(x) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, x^n$.

b) Geben Sie einen geschlossenen Ausdruck (ohne Summensymbol) für die obengenannte Funktion $f : (-R, R) \to \mathbb{R}$ an. (Hinweis: Die zweite Ableitung einer bekannten Funktion hat eine sehr ähnliche Form wie unsere Reihe.)

Aufgabe 52. (mündlich) *(Addition von Potenzreihen)*
Seien r bzw. R die Konvergenzradien der Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ bzw. $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. Es gelte $0 < r < R$. Zeigen Sie, dass der Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)\, x^n$ wieder r ist, indem Sie nachweisen, dass

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)\, x^n$ konvergiert für $|x| < r$,

b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)\, x^n$ divergiert für $r < |x| < R$.