Übungen zur Analysis I, WS 2000/01

Abgabe am 03.11.2000 vor der Vorlesung

Aufgabe 9. *(Rechnen mit Ungleichungen)*
Seien a, a', b und b' reelle Zahlen. Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln:

a) $a < b \Rightarrow$ für alle positiven Zahlen $c \in \mathbb{R}^+$ gilt $c \cdot a < c \cdot b$,

b) $0 < a < b$ und $0 < a' < b' \Rightarrow a \cdot a' < b \cdot b'$.

Geben Sie in jedem Beweisschritt an, welches der Anordungsaxiome (A1 bis A3), bzw. welche in der Vorlesung bewiesene Eigenschaft von $\mathbb{R}$ Sie benutzen.

Aufgabe 10. *(Dichtheit der rationalen Zahlen in $\mathbb{R}$)*
Zeigen Sie: Zwischen je zwei (verschiedenen) reellen Zahlen liegt eine rationale Zahl. Mit anderen Worten: Sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, so gibt es ein $r \in \mathbb{Q}$ mit

$$a < r < b \; .$$

(Hinweis: Konstruieren Sie das gesuchte r in der Form $\frac{m}{n}$, wobei $m \in \mathbb{Z}$ ist und n eine natürliche Zahl mit $\frac{1}{n} < b - a$ ist.)

Aufgabe 11. *(Supremum und Infimum)*
Für Teilmengen $A, B \subset \mathbb{R}$ betrachten wir die Menge $A + B$, die durch

$$A + B := \{\, a + b \mid a \in A \text{ und } b \in B \,\}$$

definiert ist. Zeigen Sie: Falls A und B nicht-leer und beschränkt sind, so gilt:

a) $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$,

b) $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Aufgabe 12. (mündlich) *(Rechenregeln in $\mathbb{R}$)*
Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) $\forall\, a, b \in \mathbb{R} : -(a + b) = (-a) + (-b)$,

b) $\forall\, a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : (a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$,

c) $\forall\, a, b \in \mathbb{R} : (-a) \cdot b = -(a \cdot b)$,

d) $\forall\, a, b \in \mathbb{R} : (-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.

Geben Sie wie in Aufgabe 9 in jedem Beweisschritt an, welches der Körperaxiome (K1 bis K5), bzw. welche in der Vorlesung bewiesene Eigenschaft von $\mathbb{R}$ Sie benutzen.