Übungen zur Analysis I, WS 2000/01

Abgabe am 10.11.2000 in der Vorlesung

Aufgabe 13. *(Grenzwerte von Folgen)*
Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls die Grenzwerte:

a) $\left(\dfrac{(2-n)^2}{2n^2-2}\right)_{n\geq 2}$,

b) $\left((-1)^n\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$,

c) $\left(\sqrt{n+1000}-\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Aufgabe 14. *(Grenzwert einer zusammengesetzten Folge)*
Es seien (a_n) und (b_n) zwei Folgen reeller Zahlen. Wir definieren eine Folge (c_n) durch

$$c_{2n} := a_n \quad \text{und} \quad c_{2n-1} := b_n \quad \text{für } n \in \mathbb{N}\ .$$

Zeigen Sie: (c_n) konvergiert genau dann gegen $c \in \mathbb{R}$, wenn die beiden Folgen (a_n) und (b_n) gegen c konvergieren.

Aufgabe 15. *(Divergenz der Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$)*
Sei q eine reelle Zahl mit $|q| > 1$. Beweisen Sie, dass die Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert.

Aufgabe 16. (mündlich) *(Abzählbarkeit von Mengen)*
Entscheiden Sie (kurze Begründung), welche der folgenden Mengen abzählbar sind:

a) $M_1 := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \,|\, a_n \in \mathbb{R}\}$,

b) $M_2 := \{(x_1, x_2) \,|\, x_1, x_2 \in \mathbb{N}\}$,

c) $M_3 := \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 \leq x < \frac{1}{10}\}$.