Übungen zur Analysis I, WS 2000/01

Abgabe am 17.11.2000 vor der Vorlesung

Aufgabe 17. *(Kettenwurzel)*
In dieser Aufgabe soll der Wert des Ausdrucks

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}}$$

berechnet werden, d.h. der Grenzwert der Folge (a_n), die rekursiv durch

$$a_0 := 0, \quad a_{n+1} := \sqrt{2+a_n}$$

definiert ist. Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

a) Zeigen Sie, dass $1 \leq a_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass die Folge (a_n) monoton wachsend ist.

c) Folgern Sie, dass (a_n) konvergiert, und berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Aufgabe 18. *(Häufungswerte von Folgen)*
Bestimmen Sie die Häufungswerte der nachstehenden Folgen und geben Sie (falls existent) liminf und limsup an.

a) $a_n := (-1)^n \cdot (b_n + \frac{1}{n})$, wobei $b_n := \begin{cases} 1 & \text{, falls } n \text{ oder } n+1 \text{ durch 4 teilbar ist,} \\ 2 & \text{, sonst.} \end{cases}$

b) $c_n := (-1)^n \sqrt{2n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$.

Aufgabe 19. *(Folgen mit vielen Häufungswerten)*
Sei $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $n \mapsto r_n$, eine (bijektive) Abzählung von $\mathbb{Q}$.

a) Zeigen Sie, dass jede reelle Zahl ein Häufungswert der Folge $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.

b) Die Folge (s_n) sei definiert durch $s_n := \frac{r_n}{r_n^2+1}$. Bestimmen Sie die Häufungspunkte von (s_n) sowie (falls existent) liminf und limsup.

Aufgabe 20. (mündlich) *(Exponentialfolge)*
Wir betrachten die beiden Folgen $a_n := (1+\frac{1}{n})^n$ und $b_n := (1+\frac{1}{n})^{n+1}$. Beweisen Sie:

a) (a_n) ist monoton wachsend.

b) (b_n) ist monoton fallend.

c) $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

d) Beide Folgen konvergieren.

e) Beide Folgen haben den gleichen Grenzwert.

(Hinweis: Sie dürfen die folgende Tatsache (ohne Beweis) benutzen:
Das Produkt von m nichtnegativen reellen Zahlen mit konstanter Summe ist dann und nur dann am größten, wenn alle Faktoren gleichgroß sind.)