Übungen zur Analysis I, WS 2000/01

Abgabe am 24.11.2000 vor der Vorlesung

Aufgabe 21. *(Cauchykriterium für Folgen)*
Wir betrachten die durch $a_1 := 1$ und $a_{n+1} := \frac{2+a_n}{1+a_n}$ rekursiv definierte reelle Zahlenfolge. Zeigen Sie:

a) $1 \leq a_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) $|a_m - a_n| \leq \frac{1}{4} \cdot |a_{m-1} - a_{n-1}|$ für alle natürlichen Zahlen $m, n \geq 2$.

c) Die Folge (a_n) ist konvergent.

Aufgabe 22. *(Konvergenzkriterien für Reihen)*
Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 \cdot 3^n}{n!}$, b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(-2)^n}$,

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$, d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n! + n^n}$.

Aufgabe 23. *(Vertauschen von Grenzwert und Summe)*
Berechnen Sie:

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n}{(n+k)(n+k+1)}$,

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+k)(n+k+1)}$.

(Hinweis: Es kann günstig sein, wenn Sie zunächst geeignete a und b für eine *Partialbruchzerlegung* $\frac{1}{(n+k)(n+k+1)} = \frac{a}{n+k} + \frac{b}{n+k+1}$ ermitteln.)

Aufgabe 24. (mündlich) *(Bestimmte Divergenz)*
Seien (a_n) und (b_n) zwei bestimmt divergente reelle Zahlenfolgen und (c_n) eine Nullfolge. Beweisen Sie:

a) Die Folge $(a_n + b_n)$ ist bestimmt divergent.

b) Die Folge $(a_n \cdot b_n)$ ist bestimmt divergent.

c) Die Folge $(a_n + c_n)$ ist bestimmt divergent.

Finden Sie Beispiele für bestimmt divergente Folgen (a_n) und Nullfolgen (c_n), so dass

d) die Folge $(a_n \cdot c_n)$ bestimmt divergent ist.

e) die Folge $(a_n \cdot c_n)$ Nullfolge ist.

f) die Folge $(a_n \cdot c_n)$ gegen ein vorgegebenes $r \in \mathbb{R}$ konvergiert.