Übungen zur Analysis I, WS 2000/01

Abgabe am 01.12.2000 vor der Vorlesung

Aufgabe 26. *(Cauchyprodukt)*
Sei q eine reelle Zahl mit $|q| < 1$. Beweisen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot q^n$$

konvergiert und berechnen Sie den Reihenwert.

(Hinweis: Betrachten Sie das Cauchyprodukt einer geeigneten Reihe mit sich selbst.)

Aufgabe 27. *(Cauchykriterium für Folgen in $\mathbb{C}$)*

a) Zeigen Sie, dass für eine komplexe Zahl z die folgenden Ungleichungen gelten:

$$\frac{|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|}{\sqrt{2}} \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \ .$$

b) Folgern Sie, dass eine komplexe Zahlenfolge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann eine Cauchyfolge ist, wenn die reellen Folgen $(\operatorname{Re} z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\operatorname{Im} z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolgen sind.

Aufgabe 28. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge reeller Zahlen, so dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert. Beweisen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot a_n = 0$.

(Hinweis: Es kann hilfreich sein, die Cauchyeigenschaft der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ auszunutzen.)

Aufgabe 29. (mündlich) *(Rechnen mit komplexen Zahlen)*

a) Bestimmen Sie von den folgenden komplexen Zahlen den Real- und Imaginärteil:

$$\text{i)}\ \frac{\mathrm{i}-1}{\mathrm{i}+1}\ , \qquad \text{ii)}\ \left(\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^n \qquad n\in\mathbb{N}\ .$$

b) Berechnen Sie den Betrag der folgenden komplexen Zahlen:

$$\text{i)}\ \frac{4\mathrm{i}+3}{1-2\mathrm{i}}\ , \qquad \text{ii)}\ \frac{1-n\mathrm{i}\sqrt{3}}{1+n\mathrm{i}\sqrt{3}} \qquad n\in\mathbb{N}\ .$$

Die **Klausuren** zur Analysis I finden an folgenden Terminen statt:
1. Klausur: Freitag, 22.12.2000 um 14 Uhr s.t. in HG 5 und HG 7
2. Klausur: Freitag, 26.01.2001 um 14 Uhr s.t. in HG 5 und HG 7
Nachschreibeklausur: Montag, 26.03.2001 um 10 Uhr s.t. in HG 4