Übungen zur Analysis I, WS 2000/01

Abgabe am 08.12.2000 vor der Vorlesung

Aufgabe 30. *(Absolute Konvergenz)*
Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge komplexer Zahlen, d.h. es gibt eine reelle Zahl B, so dass $|b_n| \leq B$ für alle natürlichen Zahlen n. Sei weiterhin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe komplexer Zahlen.

a) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ absolut konvergiert.

b) Geben Sie ein Gegenbeispiel dafür an, dass die Aussage von a) falsch wird, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ zwar konvergiert, aber nicht absolut konvergiert.

Aufgabe 31. *(Sinus und Cosinus hyperbolicus)*
Die hyperbolischen trigonometrischen Funktionen sinh und cosh seien wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ , \quad \sinh(x) &:= \tfrac{1}{2}(\exp(x) - \exp(-x)) \\ \cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ , \quad \cosh(x) &:= \tfrac{1}{2}(\exp(x) + \exp(-x)) \end{aligned}$$

Beweisen Sie, dass für alle reellen Zahlen x und y gilt:

a) $\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$,
$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$,

b) $\sinh(x+y) = \cosh(x)\sinh(y) + \sinh(x)\cosh(y)$,
$\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$,

c) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.

Skizzieren Sie außerdem den Graph der beiden Funktionen.

Aufgabe 32. *(Einseitige Grenzwerte)*
Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$. Sei außerdem a ein *„innerer"* Berührpunkt von D, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ gilt $(a-\varepsilon, a] \cap D \neq \emptyset$ und $[a, a+\varepsilon) \cap D \neq \emptyset$.
Zeigen Sie f konvergiert für $x \to a$ genau dann gegen $b \in \mathbb{R}$, wenn beide einseitigen Grenzwerte $\lim\limits_{x \nearrow a} f(x)$ und $\lim\limits_{x \searrow a} f(x)$ existieren und gleich b sind.

Aufgabe 33. (mündlich) *(Komplexe Zahlen)*

a) Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene:
   (i) $M_1 := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-1| \leq |z+1|\}$,
   (ii) $M_2 := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-i| = \sqrt{2} = |z+i|\}$.

b) Sei z eine komplexe Zahl. Zeigen Sie, dass eine komplexe Zahl w existiert, so dass $w^2 = z$. Wieviele solche w existieren für ein vorgegebenes z?