Übungen zur Analysis I, WS 2000/01

Abgabe am 15.12.2000 vor der Vorlesung

Aufgabe 34. *(Grenzwerte)*
Für welche Werte des Parameters $a \in \mathbb{R}$ existiert der Grenzwert

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{1}{2-x} - \frac{a}{4-x^2} \right) ?$$

Aufgabe 35. *(Stetigkeit der Wurzelfunktion)*
Die Funktion $\sqrt{}$ sei wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \sqrt{} : \mathbb{R}_0^+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $\sqrt{}$ auf $\mathbb{R}_0^+$ stetig ist.

Aufgabe 36. *(Unstetige Grenzfunktion)*
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ werde eine Funktion $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g_n(x) := \frac{nx}{1 + |nx|} .$$

a) Begründen Sie, warum jede der Funktionen g_n auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist.

(Hinweis: Beweisen Sie zuerst die Stetigkeit der Betragsfunktion.)

b) Beweisen Sie, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ der Grenzwert $\lim\limits_{n \to \infty} g_n(x)$ existiert.

c) In welchen Punkten ist die durch $g(x) := \lim\limits_{n \to \infty} g_n(x)$ definierte Grenzfunktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig?

Aufgabe 37. (mündlich) *(Stetige Funktionen)*

a) Es seien f und g stetige Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{Q}$ gilt. Zeigen Sie, dass dann $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

b) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R} .$$

Zeigen Sie, dass dann $f(x) = ax$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, wobei $a := f(1)$.

(Hinweis: Zeigen Sie die Behauptung zunächst für alle $x \in \mathbb{Q}$.)