Übungen zur Analysis I, WS 2000/01

Abgabe am 12.01.2001 vor der Vorlesung

Aufgabe 38. *(Ein Fixpunktsatz)*
Es sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f([0,1]) \subset [0,1]$. Zeigen Sie, dass f einen Fixpunkt hat, d.h. dass es einen Punkt $x_0 \in [0,1]$ mit $f(x_0) = x_0$ gibt.

(Hinweis: Betrachten Sie $g(x) := f(x) - x$.)

Aufgabe 39. *(Differenzierbarkeit)*
Zu vorgegebener natürlicher Zahl n betrachten wir die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{, falls } x \leq 0 \\ x^n & \text{, falls } x > 0 \,. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass diese Funktion $(n-1)$-mal differenzierbar ist, aber nicht n-mal, und berechnen Sie die Ableitungen $f^{(k)}$ für $1 \leq k < n$.

Aufgabe 40. *(Arithmetisches und geometrisches Mittel)*
Beweisen Sie die Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$$

für alle positiven reellen Zahlen $a_1, \ldots, a_n$. Zeigen Sie, dass Gleichheit nur dann eintreten kann, wenn $a_1 = \ldots = a_n$ ist.

(Anleitung: Führen Sie eine Induktion nach n durch und untersuchen Sie im Induktionsschritt zu gegebenen $a_1, \ldots, a_n$ die Funktion

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \left(\dfrac{a_1 + \ldots + a_n + x}{n+1}\right)^{n+1} - a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot x \end{array}$$

mit den Mitteln der Differentialrechnung auf Minima.)

Aufgabe 41. *(Nullstellen von Polynomen)*
Zeigen Sie mit dem Satz von Rolle, dass eine Polynomfunktion

$$\begin{array}{rccl} p: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 \end{array}$$

vom Grad $n > 0$ mit reellen Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$ höchstens n Nullstellen hat.

(Hinweis: Führen Sie eine Induktion nach n durch.)

Bitte wenden!

Aufgabe 42. *(Dehnungsbeschränkte Funktionen)*
Es sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und sei $c \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $|f'(x)| \leq c$ für alle $x \in (a, b)$.

(ii) $|f(x) - f(y)| \leq c \cdot |x - y|$ für alle $x, y \in (a, b)$.

Aufgabe 43. *(Exponentialfolge und Exponentialfunktion)*
Zeigen Sie, dass für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = \exp a \ .$$

(Hinweis: Berechnen Sie zuerst $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \exp\left(\frac{1}{x} \ln(1 + ax)\right)$, z.B. indem Sie den Grenzwert des Exponenten $\frac{1}{x} \ln(1 + ax)$ mit der Regel von de l'Hospital bestimmen.)

Aufgabe 44. (mündlich) *(Umkehrfunktionen)*

a) Zeigen Sie durch Induktion nach $k \geq 1$, dass jede Potenzfunktion

$$\begin{aligned} f_k : \ \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto x^k \end{aligned}$$

streng monoton wachsend und surjektiv ist. Folgern Sie daraus, dass die k-te Wurzelfunktion $\sqrt[k]{\ } : \ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ differenzierbar ist, und geben Sie ihre Ableitung an.

b) Es sei $X := [0, 1) \cup \{2\}$ und $f : X \to [0, 1]$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x & , \text{falls } x \neq 2 \\ 1 & , \text{falls } x = 2 \ . \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f bijektiv und stetig ist und dass die Umkehrfunktion f^{-1} existiert aber nicht stetig ist.

Wir wünschen Ihnen
ein frohes Weihnachtsfest
und ein erfolgreiches
Jahr 2001!