Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps Universität Marburg
Prof. Dr. Th. Bauer, Chr. Schulz

Wintersemester 2000/01

1. Klausur zur Analysis I, WS 2000/01
Freitag, den 22.12.2000, **14.05 - 16.05 Uhr**

Name									
Matrikelnummer									
Tutorengruppe									
Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Erreichbare Punkte	10	10	$5+5$	10	10	$5+5$	$5+5$	10	80
Erreichte Punkte									

Füllen Sie bitte zuerst das Deckblatt aus und versehen Sie alle Blätter mit Ihrem Namen!
Bearbeiten Sie die Aufgaben auf den ausgegebenen Blättern. Sollte der Platz unter der Aufgabenstellung und auf der Rückseite des Aufgabenblattes nicht ausreichen, so benutzen Sie bitte die leeren Blätter am Ende der Klausur.
Geben Sie die Klausur möglichst nach Aufgaben geordnet und geheftet ab (ein Hefter befindet sich bei der Abgabestelle).
Es sind keinerlei Hilfsmittel zugelassen.

Wir wünschen viel Erfolg!

Aufgabe 1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. **Kreuzen Sie die richtige Antwort an.** Es werden **keine** Begründungen verlangt. Jede richtig beantwortete Teilaufgabe bringt einen Punkt, jede falsch beantwortete Teilaufgabe ergibt einen Punkt Abzug. Nicht beantwortete Teile werden nicht gewertet.

1. Jede Menge reller Zahlen enthält ein Maximum. *richtig* ☐ *falsch* ☐

2. Jede konvergente Folge ist beschränkt. *richtig* ☐ *falsch* ☐

3. Jede beschränkte Folge enthält eine Teilfolge, die eine Cauchy-Folge ist. *richtig* ☐ *falsch* ☐

4. Jede Teilfolge einer konvergenten Folge konvergiert. *richtig* ☐ *falsch* ☐

5. Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit $a_n < b_n$. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. *richtig* ☐ *falsch* ☐

6. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Dann ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent. *richtig* ☐ *falsch* ☐

7. Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und I ein Intervall. Dann ist auch $f(I)$ ein Intervall. *richtig* ☐ *falsch* ☐

8. Jede stetige Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt ein absolutes Minimum. *richtig* ☐ *falsch* ☐

9. Jede in $a \in \mathbb{R}$ differenzierbare Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig in a. *richtig* ☐ *falsch* ☐

10. Jede streng monoton wachsende und surjektive Funktion $f: [a,b] \to [c,d]$ ist differenzierbar auf (a,b). *richtig* ☐ *falsch* ☐

Aufgabe 2. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2 = (-1)^n \binom{n+1}{2} \ .$$

Aufgabe 3. a) Es ist bekannt, dass $n^2 \leq 2^n$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq 4$ gilt. Beweisen Sie, dass $\sup\{\, \frac{n^2}{2^n} \mid n \in \mathbb{N} \,\} = \frac{9}{8}$ ist.

b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge positiver reeller Zahlen. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl m existiert, für die gilt $a_m < \frac{a_n}{2}$.

Aufgabe 4. Eine Folge reeller Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei wie folgt definiert:

$$a_1 := \frac{1}{4}\ , \quad a_{n+1} := a_n^2 + \frac{1}{4}\ .$$

Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

(Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $\frac{1}{2}$ nach oben beschränkt und monoton wachsend ist.)

Aufgabe 5. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver reeller Zahlen. Beweisen Sie, dass mindestens eine der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $(\frac{1}{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ einen Häufungswert besitzt.

Aufgabe 6.

a) (i) Begründen Sie, dass für die Eulersche Zahl e gilt $e > \frac{5}{2}$.

(ii) Untersuchen Sie die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{\exp(n)}$ auf Konvergenz.

b) Begründen Sie, dass die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+3)}$ konvergiert und berechnen Sie den Reihenwert.

Aufgabe 7. Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeigen Sie:

a) Falls $|f(x)| \leq |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, dann ist f stetig im Nullpunkt.

b) Falls $|f(x)| \leq |x|^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, dann ist f differenzierbar im Nullpunkt.

Aufgabe 8. Beweisen Sie, dass es keine stetige und surjektive Funktion f gibt mit

$$f: \ [0,1] \to [0,1) \ .$$

Zusatz zu Aufgabe ...

Zusatz zu Aufgabe ...

Zusatz zu Aufgabe . . .

Zusatz zu Aufgabe . . .

Zusatz zu Aufgabe ...