Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps Universität Marburg
Prof. Dr. Th. Bauer, Chr. Schulz

Wintersemester 2000/01

2. Klausur zur Analysis I, WS 2000/01
Freitag, den 26.01.2001, **14.05 - 16.05 Uhr**

Name								
Matrikelnummer								
Tutorengruppe								
Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Erreichbare Punkte	10	10	10	$5+5$	$5+5$	$2+8$	$5+5$	70
Erreichte Punkte								

Füllen Sie bitte zuerst das Deckblatt aus und versehen Sie alle Blätter mit Ihrem Namen!
Bearbeiten Sie die Aufgaben auf den ausgegebenen Blättern. Sollte der Platz unter der Aufgabenstellung und auf der Rückseite des Aufgabenblattes nicht ausreichen, so benutzen Sie bitte die leeren Blätter am Ende der Klausur.
Geben Sie die Klausur möglichst nach Aufgaben geordnet und geheftet ab (ein Hefter befindet sich bei der Abgabestelle).
Es sind keinerlei Hilfsmittel zugelassen.

Wir wünschen viel Erfolg!

Aufgabe 1. Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Beweisen Sie, dass die Funktion

$$\begin{array}{rcl} f: \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n \cdot \exp(-x) \end{array}$$

ein relatives Maximum an der Stelle $x = n$ besitzt.

Aufgabe 2. Es seien $f, g : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(0) = g(0) = 0$ und $f(x) \cdot g(x) = x$ für alle $x \in (-1, 1)$. Zeigen Sie, dass f im Nullpunkt nicht differenzierbar ist.

Aufgabe 3. Beweisen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, dass für alle reellen Zahlen x, y gilt

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y| \ .$$

Aufgabe 4. Bestimmen Sie die Grenzwerte

a)
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(1+\exp x)}{x} ,$$

b)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2} .$$

(Begründen Sie jeweils, warum die durchgeführten Rechenschritte erlaubt sind.)

Aufgabe 5. Überprüfen Sie, ob bei den nachstehenden Funktionenfolgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßige oder punktweise Konvergenz vorliegt und geben Sie gegebenenfalls die Grenzfunktionen an.

a)
$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{n} \cdot \sin(nx) \ , \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} g_n : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x}{n} \cdot \sin(nx) \ . \end{aligned}$$

Aufgabe 6.

a) Begründen Sie, dass für alle positiven reellen Zahlen y gilt

$$\exp(-y) \leq 1 \; .$$

b) Seien die folgenden Funktionen gegeben:

$$\begin{array}{rccl} f_n : & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{1}{n^2} \cdot \exp(-nx) \; . \end{array}$$

Zeigen Sie, dass die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ eine stetige Funktion auf $\mathbb{R}^+$ darstellt.

Aufgabe 7. Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}\, x^n \ ,$$

b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 + (-1)^n)\, x^n \ .$$

Zusatz zu Aufgabe ...

Zusatz zu Aufgabe ...

Zusatz zu Aufgabe ...

Zusatz zu Aufgabe ...