Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps Universität Marburg
Prof. Dr. Th. Bauer, Chr. Schulz

Wintersemester 2000/01

Wiederholungsklausur zur Analysis I, WS 2000/01
Montag, den 26.03.2001, **10.05 - 12.05 Uhr**

Name								
Matrikelnummer								
Tutorengruppe								
Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Erreichbare Punkte	10	10	$5+5$	10	$5+5$	10	10	70
Erreichte Punkte								

Füllen Sie bitte zuerst das Deckblatt aus und versehen Sie <u>alle</u> Blätter mit Ihrem Namen!
Bearbeiten Sie die Aufgaben auf den ausgegebenen Blättern. Sollte der Platz unter der Aufgabenstellung und auf der Rückseite des Aufgabenblattes nicht ausreichen, so benutzen Sie bitte die leeren Blätter am Ende der Klausur.
Geben Sie die Klausur möglichst nach Aufgaben geordnet und geheftet ab (ein Hefter befindet sich bei der Abgabestelle).
Es sind keinerlei Hilfsmittel zugelassen.

Wir wünschen viel Erfolg!

Aufgaben:

Aufgabe 1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Siehe dort!

Aufgabe 2. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge reeller Zahlen, die eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ besitzt. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist.

Aufgabe 3.

a) Beweisen Sie, dass für den Wert $0,9999\ldots := \sum\limits_{n=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-n}$ gilt: $0,9999\ldots = 1$.

b) Untersuchen Sie die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n! \cdot 3^n}$ auf Konvergenz.

Aufgabe 4. Seien $f, g :\ [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(a) < g(a)$ und $f(b) > g(b)$. Zeigen Sie, dass es ein $c \in (a, b)$ gibt mit $f(c) = g(c)$.

Aufgabe 5. Die Funktion $f :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei wie folgt definiert:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin \frac{1}{x} & \text{, falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{, falls } x = 0\ . \end{cases}$$

Beweisen Sie,

a) dass f in 0 differenzierbar ist mit $f'(0) = 0$,

b) dass aber der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ nicht existiert.

Aufgabe 6. Zeigen Sie, dass durch $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\cdot x)}{n^3}$ eine differenzierbare Funktion auf $\mathbb{R}$ definiert wird.

Aufgabe 7. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, für die reelle Zahlen a, b existieren, so dass $0 < a \leq |a_n| \leq b < \infty$. Wie groß ist der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$?

Aufgabe 1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. **Kreuzen Sie die entsprechende Antwort an.** Es werden **keine** Begründungen verlangt. Jede richtig beantwortete Teilaufgabe bringt einen Punkt, jede falsch beantwortete Teilaufgabe ergibt einen Punkt Abzug. Nicht beantwortete Teile werden nicht gewertet.

1. Die Menge $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist abzählbar. *richtig* ☐ *falsch* ☐

2. Jede Folge reeller Zahlen besitzt nur endlich viele Häufungswerte. *richtig* ☐ *falsch* ☐

3. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reller Zahlen ($a_n \neq 0$), so dass gilt $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$ für fast alle n. Dann ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent. *richtig* ☐ *falsch* ☐

4. Jede streng monoton steigende und stetige Funktion $f: [a,b] \to [c,d]$ mit $f(a) = c$ und $f(b) = d$ ist bijektiv. *richtig* ☐ *falsch* ☐

5. Die Logarithmusfunktion $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ist monoton wachsend und nach oben beschränkt. *richtig* ☐ *falsch* ☐

6. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine punktweise konvergente Funktionenfolge von Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die alle stetig im Nullpunkt sind. Dann ist auch die Grenzfunktion im Nullpunkt stetig. *richtig* ☐ *falsch* ☐

7. Jede gleichmäßig konvergente Funktionenfolge konvergiert auch punktweise. *richtig* ☐ *falsch* ☐

8.-10. Sei R der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Dann ist ...

... $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ konvergent. *richtig* ☐ *falsch* ☐

... die Funktion $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ auf $(-R, R)$ stetig. *richtig* ☐ *falsch* ☐

... $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ auf $(-R, R)$ differenzierbar. *richtig* ☐ *falsch* ☐

Aufgabe 2. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge reeller Zahlen, die eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ besitzt. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist.

Aufgabe 3.

a) Beweisen Sie, dass für den Wert $0,9999\ldots := \sum_{n=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-n}$ gilt: $0,9999\ldots = 1$.

b) Untersuchen Sie die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n! \cdot 3^n}$ auf Konvergenz.

Aufgabe 4. Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(a) < g(a)$ und $f(b) > g(b)$. Zeigen Sie, dass es ein $c \in (a, b)$ gibt mit $f(c) = g(c)$.

Aufgabe 5. Die Funktion $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei wie folgt definiert:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin \frac{1}{x} & \text{, falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{, falls } x = 0\ . \end{cases}$$

Beweisen Sie,

a) dass f in 0 differenzierbar ist mit $f'(0) = 0$,

b) dass aber der Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ nicht existiert.

Aufgabe 6. Zeigen Sie, dass durch $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n \cdot x)}{n^3}$ eine differenzierbare Funktion auf $\mathbb{R}$ definiert wird.

Aufgabe 7. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, für die reelle Zahlen a, b existieren, so dass $0 < a \leq |a_n| \leq b < \infty$. Wie groß ist der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$?

Zusatz zu Aufgabe ...

Zusatz zu Aufgabe ...

Zusatz zu Aufgabe ...