Übungen zur Analysis II, SS 2001

Abgabe am **Mittwoch**, den 11.04.2001 vor der Vorlesung

Aufgabe 4. *(Trigonometrische Funktionen)*
Zeigen Sie, daß für $x \neq 0$ gilt

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{falls } x > 0 \ , \\ -\frac{\pi}{2} & \text{falls } x < 0 \ . \end{cases}$$

(Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass die Gleichung $\sin(x) = \cos(x)$ genau für die $x \in \mathbb{R}$ der Form $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$; $k \in \mathbb{Z}$ erfüllt ist.)

Aufgabe 5. *(Regelintegral)*
Berechnen Sie das Regelintegral $\int_0^1 f$ der Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$; $f(x) := x^2$. Geben Sie dazu eine Folge von Treppenfunktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ an, die gleichmäßig gegen f konvergiert.

(Hinweis: Sie dürfen die Formel $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ohne Beweis benutzen.)

Aufgabe 6. *(Erweiterter Mittelwertsatz der Integralrechnung)*
Es seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $g(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$. Beweisen Sie, dass es ein $c \in [a,b]$ gibt, so dass gilt

$$\int_a^b f \cdot g = f(c) \cdot \int_a^b g \ .$$

Aufgabe 7. (mündlich) *(Taylorreihen)*
Entwickeln Sie die Funktion arctan durch eine Potenzreihe um den Nullpunkt und geben Sie deren Konvergenzradius an.

(Hinweis: Die direkte Entwicklung ist mühsam. Stellen Sie daher zuerst $\arctan'$ durch eine Potenzreihe dar, indem Sie die Formel für die geometrische Reihe benutzen.)