Übungen zur Analysis II, SS 2001

Abgabe am Freitag, den 22.06.2001 vor der Vorlesung

Aufgabe 44.
Sie U eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und M eine zusammenhängende Untermannigfaltigkeit von U. Weiterhin sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^1$-Funktion mit $\mathrm{grad} f(a) = 0$ für alle a aus M. Zeigen Sie, dass f auf M konstant ist.

(Hinweis: Begradigungslemma)

Aufgabe 45. *(Gewichtetes arithmetisches und geometrisches Mittel)*

a) Seien n positive Zahlen s_j, $j = 1, \ldots, n$ gegeben und $f : (\mathbb{R}^+)^n \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^{s_1} \cdots x_n^{s_n}$. Bestimmen Sie die Extremwerte von f unter der Nebenbedingung $x_1 + \ldots + x_n = 1$.

b) Beweisen Sie, dass für alle $(y_1, \ldots y_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ die Ungleichung

$$(y_1^{s_1} \cdots y_n^{s_n})^{\frac{1}{s_1 + \cdots + s_n}} \leq \frac{s_1 y_1 + \ldots + s_n y_n}{s_1 + \ldots + s_n}$$

gilt.

(Hinweis: Betrachten Sie f aus Aufgabenteil a) auf dem Punkt $(\frac{s_1 y_1}{\sum_j s_j y_j}, \ldots, \frac{s_n y_n}{\sum_j s_j y_j})$.)

Aufgabe 46.
Berechnen Sie das iterierte Integral

$$\int_0^1 \int_1^2 x^3 \exp(-x^2 y) \, dx \, dy \quad .$$

Aufgabe 47. (mündlich) *(Dimensionserniedrigende Abbildungen)*
Sei U eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^2$. Beweisen Sie, dass es keine injektive $\mathcal{C}^1$-Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ gibt.

(Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle $\mathrm{grad} f(a) = 0$ für alle $a \in U$ und $\mathrm{grad} f(a) \neq 0$ für ein $a \in U$.)