

Übungen zur Analysis II, SS 2001

Abgabe am Freitag, den 27.04.2001 vor der Vorlesung

Aufgabe 12. Sei A eine $m \times n$ -Matrix mit reellen Einträgen a_{ij} . Die 2-Norm $\|\cdot\|_2$ von A sei wie folgt definiert:

$$\|A\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}.$$

Beweisen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ die Ungleichung

$$\|A \cdot x\|_2 \leq \|A\|_2 \cdot \|x\|_2$$

gilt.

(Hinweis: Es ist nützlich, sich zuerst die Beweisidee am einfachsten Beispiel einer 2×2 -Matrix klarzumachen.)

Aufgabe 13. (*r-Kugeln*)

Es sei die euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^n$ gegeben.

- Zeigen Sie, dass jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ als eine Vereinigung von offenen r_i -Kugeln $U = \bigcup_{i \in I} U_{r_i}(a_i)$ geschrieben werden kann.
- Zeigen Sie, dass eine abzählbare Vereinigung dafür ausreicht.

(Hinweis: Benutzen Sie für den zweiten Teil der Aufgabe nur Kugeln $U_{r_i}(a_i)$ mit rationalen Radien r_i und Mittelpunkten a_i .)

Aufgabe 14. (*Französische Metrik I*)

Die sogenannte „französische“ Metrik d_f auf $\mathbb{R}^2$ ist wie folgt definiert: Seien $x, y \in \mathbb{R}^2$ und $\|\cdot\|_2$ die euklidische Norm.

$$d_f(x, y) := \begin{cases} \|x - y\|_2 & \text{falls } x, y \text{ linear abhängig,} \\ \|x\|_2 + \|y\|_2 & \text{falls } x, y \text{ linear unabhängig.} \end{cases}$$

- Zeigen Sie, dass d_f eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$ ist.
- Beschreiben Sie die offenen r -Kugeln $U_r(a)$ des metrischen Raumes $(\mathbb{R}^2, d_f)$.

Aufgabe 15. (mündlich) (*Französische Metrik II*)

- Ist d_f äquivalent zur euklidischen Metrik?
- Falls das nicht der Fall ist, geben Sie ein Beispiel an für eine Folge im $\mathbb{R}^2$, die bezüglich der euklidischen Metrik konvergiert, bezüglich der „französischen“ Metrik aber nicht konvergiert.
- Gibt es eine Norm auf $\mathbb{R}^2$, welche die „französische“ Metrik induziert?