Übungen zur Analysis II, SS 2001

Abgabe am Freitag, den 27.04.2001 vor der Vorlesung

Aufgabe 12. Sei A eine $m \times n$-Matrix mit reellen Einträgen a_{ij} . Die 2-Norm $||\cdot||_2$ von A sei wie folgt definiert:

$$||A||_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2} \ .$$

Beweisen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ die Ungleichung

$$||A \cdot x||_2 \leq ||A||_2 \cdot ||x||_2$$

gilt.

(Hinweis: Es ist nützlich, sich zuerst die Beweisidee am einfachsten Beispiel einer 2×2-Matrix klarzumachen.)

Aufgabe 13. *(r-Kugeln)*
Es sei die euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^n$ gegeben.

a) Zeigen Sie, dass jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ als eine Vereinigung von offenen r_i-Kugeln $U = \bigcup_{i \in I} U_{r_i}(a_i)$ geschrieben werden kann.
b) Zeigen Sie, dass eine abzählbare Vereinigung dafür ausreicht.

(Hinweis: Benutzen Sie für den zweiten Teil der Aufgabe nur Kugeln $U_{r_i}(a_i)$ mit rationalen Radien r_i und Mittelpunkten a_i.)

Aufgabe 14. *(Französische Metrik I)*
Die sogenannte „französische“ Metrik d_f auf $\mathbb{R}^2$ ist wie folgt definiert: Seien $x, y \in \mathbb{R}^2$ und $||\cdot||_2$ die euklidische Norm.

$$d_f(x,y) := \begin{cases} ||x-y||_2 & \text{falls } x,y \text{ linear abhängig,} \\ ||x||_2 + ||y||_2 & \text{falls } x,y \text{ linear unabhängig.} \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass d_f eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$ ist.
b) Beschreiben Sie die offenen r-Kugeln $U_r(a)$ des metrischen Raumes $(\mathbb{R}^2, d_f)$.

Aufgabe 15. (mündlich) *(Französische Metrik II)*

a) Ist d_f äquivalent zur euklidischen Metrik?
b) Falls das nicht der Fall ist, geben Sie ein Beispiel an für eine Folge im $\mathbb{R}^2$, die bezüglich der euklidischen Metrik konvergiert, bezüglich der „französischen“ Metrik aber nicht konvergiert.
c) Gibt es eine Norm auf $\mathbb{R}^2$, welche die „französische“ Metrik induziert?