Übungen zur Analysis II, SS 2001

Abgabe am Freitag, den 04.05.2001 vor der Vorlesung

Aufgabe 16. *(Stetigkeit)*
An welchen Stellen ist die folgende Abbildung $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig?

$$f(x,y) := \begin{cases} 1 - x^2 - y^2 & \text{falls } ||(x,y)||_2 < 1 \ , \\ (x-1)(y-1) & \text{falls } ||(x,y)||_2 \geq 1 \ . \end{cases}$$

Aufgabe 17. *(Vollständigkeit)*
Aus der Vorlesung ist bekannt, dass der Vektorraum $\mathcal{C}([a,b])$ der stetigen Abbildungen von $[a,b]$ nach $\mathbb{R}$ zusammen mit der Supremumsnorm ein vollständiger normierter Vektorraum ist. Hier soll nun eine andere Norm auf $\mathcal{C}([a,b])$ eingeführt werden.

a) Begründen Sie kurz, dass die Abbildung

$$\begin{array}{rccl} ||\cdot||_1 : & \mathcal{C}([a,b]) & \to & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & ||f||_1 := \int_a^b |f| \end{array}$$

eine Norm auf $\mathcal{C}([a,b])$ definiert.

b) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{C}([a,b])$, die bezüglich der Norm $||\cdot||_1$ gegen eine Funktion $f \in \mathcal{C}([a,b])$ konvergiert und sei $[c,d]$ ein Teilintervall von $[a,b]$. Zeigen Sie, dass die Folge der auf $[c,d]$ eingeschränkten Funktionen $(f_n|_{[c,d]})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f|_{[c,d]}$ bezüglich der Norm $||\cdot||_1$ auf $\mathcal{C}([c,d])$ konvergiert.

c) Beweisen Sie, dass der normierte Vektorraum $(\mathcal{C}([0,1]), ||\cdot||_1)$ nicht vollständig ist.

(Hinweis: Untersuchen Sie die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}] \ , \\ n \cdot (x - \frac{1}{2}) + 1 & \text{falls } x \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}] \ , \\ 2 & \text{falls } x \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1] \ . \end{cases}$$)

Aufgabe 18.

a) Zeigen Sie, dass die Gleichung $x = \tan(x)$ im Intervall $(\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)$ genau eine Lösung χ besitzt und dass die Folge

$$x_0 := \frac{3}{2}\pi \ , \quad x_{n+1} := \pi + \arctan(x_n)$$

gegen χ konvergiert.

b) Berechnen Sie χ mit einer Genauigkeit von mindenstens 10^{-2}.

Aufgabe 19. (mündlich) *(Kompaktheit)*

a) Man zeige, dass die Vereinigung von endlich vielen kompakten Teilmengen eines Raumes wieder kompakt ist.

b) Gilt dies auch für abzählbar unendlich viele kompakte Teilmengen?