

Übungen zur Analysis II, SS 2001

Abgabe am Freitag, den 11.05.2001 vor der Vorlesung

Aufgabe 20. (Normenäquivalenz in $\mathbb{R}^n$)

Beweisen Sie, dass zwei beliebige Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind.

Anleitung:

- a) Wir setzen $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|' = 1\}$. Begründen Sie, dass die Funktion

$$\begin{aligned} f : S &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|x\| \end{aligned}$$

Minimum und Maximum auf S annimmt.

- b) Nutzen Sie dann, dass für alle $x \neq 0$ aus $\mathbb{R}^n$ der Punkt $\frac{1}{\|x\|'} \cdot x$ in S liegt, um die Äquivalenz von $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ zu zeigen.

Aufgabe 21. Es sei der normierter Vektorraum $(\mathcal{C}([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ der stetigen Funktionen von $[0, 1]$ nach $\mathbb{R}$ zusammen mit der Supremumsnorm gegeben. Man zeige:

- a) Es existiert eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Funktionen aus $\mathcal{C}([0, 1])$. Mit $\|f_n\|_\infty = 1$ und $\|f_n - f_m\|_\infty = 1$ für alle $n \neq m$.
- b) Die Menge $\{f \in \mathcal{C}([0, 1]) \mid \|f\|_\infty \leq 1\}$ ist abgeschlossen und beschränkt, aber nicht kompakt.

(Hinweis: Nutzen Sie den Satz von Bolzano-Weierstraß.)

Aufgabe 22. Seien X, Y metrische Räume und sei X kompakt. Weiterhin sei $f : X \rightarrow Y$ stetig und bijektiv. Zeigen Sie, dass die Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \rightarrow X$ stetig ist.

(Hinweis: Überlegen Sie sich, dass es genügt zu zeigen, dass für alle abgeschlossenen Mengen $A \subset X$ das Urbild unter f^{-1} wieder abgeschlossen ist. Nutzen Sie dann die bekannten Sätze über kompakte Mengen.)

Aufgabe 23. (mündlich) (Gegenbeispiele)

Seien X, Y metrische Räume und $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass

- i) das Urbild $f^{-1}(U)$ jeder offenen Menge $U \subset Y$ offen in X ist,
- ii) das Bild $f(K)$ jeder kompakten Menge $K \subset X$ kompakt in Y ist.

Finden Sie Beispiele für metrische Räume X, Y , stetige Abbildungen f und offene, bzw. kompakte Mengen $U \subset X$, bzw. $K \subset Y$, so dass

- a) $f(U) \subset Y$ nicht offen,
- b) $f^{-1}(K) \subset X$ nicht kompakt ist.