Übungen zur Analysis II, SS 2001

Abgabe am Freitag, den 11.05.2001 vor der Vorlesung

Aufgabe 20. *(Normenäquivalenz in $\mathbb{R}^n$)*
Beweisen Sie, dass zwei beliebige Normen $||\cdot||$ und $||\cdot||'$ auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind.
Anleitung:

a) Wir setzten $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x||' = 1\}$. Begründen Sie, dass die Funktion

$$\begin{array}{rccc} f: & S & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & ||x|| \end{array}$$

Minimum und Maximum auf S annimmt.

b) Nutzen Sie dann, dass für alle $x \neq 0$ aus $\mathbb{R}^n$ der Punkt $\frac{1}{||x||'} \cdot x$ in S liegt, um die Äquivalenz von $||\cdot||$ und $||\cdot||'$ zu zeigen.

Aufgabe 21. Es sei der normierter Vektorraum $(\mathcal{C}([0,1]), ||\cdot||_\infty)$ der stetigen Funktionen von $[0,1]$ nach $\mathbb{R}$ zusammen mit der Supremumsnorm gegeben. Man zeige:

a) Es existiert eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen aus $\mathcal{C}([0,1])$. Mit $||f_n||_\infty = 1$ und $||f_n - f_m||_\infty = 1$ für alle $n \neq m$.

b) Die Menge $\{f \in \mathcal{C}([0,1]) \mid ||f||_\infty \leq 1\}$ ist abgeschlossen und beschränkt, aber nicht kompakt.

(Hinweis: Nutzen Sie den Satz von Bolzano-Weierstraß.)

Aufgabe 22. Seien X, Y metrische Räume und sei X kompakt. Weiterhin sei $f : X \to Y$ stetig und bijektiv. Zeigen Sie, dass die Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \to X$ stetig ist.

(Hinweis: Überlegen Sie sich, dass es genügt zu zeigen, dass für alle abgeschlossenen Mengen $A \subset X$ das Urbild unter f^{-1} wieder abgeschlossen ist. Nutzen Sie dann die bekannten Sätze über kompakte Mengen.)

Aufgabe 23. (mündlich) *(Gegenbeispiele)*
Seien X, Y metrische Räume und $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass

i) das Urbild $f^{-1}(U)$ jeder offenen Menge $U \subset Y$ offen in X ist,

ii) das Bild $f(K)$ jeder kompakten Menge $K \subset X$ kompakt in Y ist.

Finden Sie Beispiele für metrische Räume X, Y, stetige Abbildungen f und offene, bzw. kompakte Mengen $U \subset X$, bzw. $K \subset Y$, so dass

a) $f(U) \subset Y$ nicht offen,

b) $f^{-1}(K) \subset X$ nicht kompakt ist.