Übungen zur Analysis II, SS 2001

Abgabe am Freitag, den 18.05.2001 vor der Vorlesung

Aufgabe 24. Zu $r > 0$ und $c \in \mathbb{R}$ sei die folgende Kurve gegeben

$$\begin{array}{rrcl} f: & [0, 2\pi] & \to & \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto & (r \cos t, r \sin t, ct) \ . \end{array}$$

a) Skizzieren Sie f.

b) Berechnen Sie die Bogenlänge von f.

Aufgabe 25. Betrachten Sie die Funktion

$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{falls } xy = 0 \ , \\ 1 & \text{sonst} \ . \end{cases} \end{array}$$

Zeigen Sie, dass f in $(0,0)$ partiell differenzierbar, aber nicht stetig ist.

Aufgabe 26. *(Totale Differenzierbarkeit)*
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ und $a \in U$. Beweisen Sie die nützliche Äquivalenz: Eine Funktion $f: U \to \mathbb{R}^m$ ist genau dann total differenzierbar in a, wenn es eine in a stetige Funktion $R: U \to \mathbb{R}^{m \times n}$ gibt, so dass für alle $x \in U$ gilt

$$f(x) = f(a) + R(x) \cdot (x - a) \ .$$

(Hinweis: Bei bekanntem r setzen Sie

$$R(x) := \begin{cases} Df(a) - \frac{1}{||x-a||^2} \, r(x) \cdot (x-a)^t & \text{falls } x \neq a \ , \\ Df(a) & \text{falls } x = a \ . \end{cases}$$

Bei bekanntem R setzen Sie $r(x) := (R(x) - R(a)) \cdot (x - a)$.

Aufgabe 27. (mündlich) *(Satz von Schwarz)*
Es sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ defniert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \ , \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \ . \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass f zweimal partiell differenzierbar in $\mathbb{R}^2$ ist,

b) dass aber $D_1 D_2 f(0,0) \neq D_2 D_1 f(0,0)$ ist, und

c) geben Sie eine partielle Ableitung $D_i D_j f$ an, die in $(0,0)$ unstetig ist.