Übungen zur Analysis II, SS 2001

Abgabe am Freitag, den 25.05.2001 vor der Vorlesung

Aufgabe 28. Begründen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R}^n \setminus \{0\} & \to & \mathbb{R}^n \\ & x & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 \\ ||x|| \\ \vdots \\ ||x||^{n-1} \end{pmatrix} \end{array}$$

differenzierbar ist, und berechnen Sie das Differential von f im Punkt $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Aufgabe 29. Sei X eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und $x, y \in X$, so dass die Menge $S := \{\, x + t(y-x) \mid t \in [0,1] \,\}$ in X liegt. Sei weiterhin $f : X \to \mathbb{R}^m$ eine differenzierbare Abbildung. Beweisen Sie, dass zu jedem $a \in \mathbb{R}^m$ ein $\xi \in S$ existiert mit

$$a \cdot (f(y) - f(x)) = a \cdot Df(\xi) \cdot (y - x) \ .$$

Aufgabe 30. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R}^{n\times n} & \to & \mathbb{R}^{n\times n} \\ & A & \mapsto & A^m \end{array}$$

differenzierbar ist, und geben Sie das Differential von f im Punkt $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ an.

Aufgabe 31. (mündlich) *(Produktregel)*
Es sei X eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, und seien $f : X \to \mathbb{R}^m$ sowie $g : X \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbare Abbildungen.

a) Zeigen Sie, dass auch $g \cdot f : X \to \mathbb{R}^m$ partiell differenzierbar ist mit

$$D(g \cdot f) = g \cdot Df + f \cdot Dg \ .$$

b) Sei nun $n = m$. Die Abbildung $\operatorname{div}(f) : X \to \mathbb{R} \ ; \ x \mapsto \sum_{i=1}^n D_i f_i(x)$ heißt *Divergenz* von f. Zeigen Sie, dass gilt

$$\operatorname{div}(g \cdot f) = g \cdot \operatorname{div}(f) + Dg \cdot f \ .$$