Übungen zur Analysis II, SS 2001

Abgabe am Freitag, den 01.06.2001 vor der Vorlesung

Aufgabe 32. *(Offene Abbildung)*
Sei U eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung, so dass $Df(x)$ invertierbar ist für alle $x \in U$. Beweisen Sie, dass $f(V) \subset \mathbb{R}^n$ offen ist für alle offenen Mengen $V \subset U$.

Aufgabe 33. Sei

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} \exp(x)\cos(y) \\ \exp(x)\sin(y) \end{pmatrix} . \end{array}$$

a) Begründen Sie, dass f eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung ist, und bestimmen Sie die Jacobi-Matrix von f.

b) Zeigen Sie, dass f ein lokaler Diffeomorphismus um jeden Punkt $a \in \mathbb{R}^2$ ist, aber kein (globaler) Diffeomorphismus.

Aufgabe 34.

a) Sei $F : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung, $(a,b) \in \mathbb{R}^{n+m}$ ein Punkt mit $F(a,b) = 0$, und sei $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)$ invertierbar. Nach dem Satz über implizite Funktionen existiert eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung $g : U(a) \to U(b)$, so dass $F(x,y) = 0$, $x \in U(a)$ genau dann wenn $y = g(x)$. Beweisen Sie $\frac{\partial g}{\partial x}(a) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}(a,b)$.

b) Betrachten Sie die Abbildung

$$\begin{array}{cccc} F: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} \sin(x+y) \\ x + yz \end{pmatrix} . \end{array}$$

Zeigen Sie, dass es eine „lokale Auflösung“ g der Gleichung $F(x,y,z) = 0$ in einer Umgebung von $(\pi, \pi, -1)$ gibt, und berechnen Sie $\frac{\partial g}{\partial x}(\pi)$.

Aufgabe 35. (mündlich)
Es sei

$$\begin{array}{cccc} F: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & x^3 + y^3 - 3xy . \end{array}$$

a) Finden Sie, ein $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so dass es eine $\mathcal{C}^1$-Funktion $g : U_\varepsilon(a) \to \mathbb{R}$ gibt mit $F(x, g(x)) = 0$ für alle $x \in U_\varepsilon(a)$ und $g'(a) = 0$.

b) Untersuchen Sie, ob g im Punkt a ein lokales Extremum besitzt.