

Übungen zur Analysis II, SS 2001

Abgabe am Freitag, den 01.06.2001 vor der Vorlesung

Aufgabe 36.

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = \exp(xy) + x^2 + ay^2$. Für welche Werte des Parameters a besitzt die Funktion f ein Extremum im Punkt $(0, 0)$?

(Hinweis: Für den Fall $a = \frac{1}{4}$ hilft die elementare Abschätzung $\exp(xy) - 1 - xy \geq 0$ (Gleichheit nur falls $xy = 0$), welche Sie ohne Beweis benutzen können.)

Aufgabe 37. (*Untermannigfaltigkeiten*)

a) Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine C^1 -Abbildung. Beweisen Sie, dass der Graph von f

$$\Gamma_f := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+m} \mid x \in \mathbb{R}^n\}$$

eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+m}$ ist.

b) Betrachten Sie die Abbildung

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (\cos t, \sin t, t) . \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass das Bild von f eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

Aufgabe 38.

a) Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^1 -Funktion mit der Eigenschaft, dass für jede Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ im $\mathbb{R}^n$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n\| = +\infty$ auch $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = +\infty$ gilt. Sei weiterhin ζ der einzige Punkt in $\mathbb{R}^n$ mit $\text{grad} f(\zeta) = 0$. Folgern Sie, dass f ein globales Minimum in ζ besitzt.

b) Sei $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq (0, \dots, 0)$, $\beta_1 > 0, \dots, \beta_n > 0$. Bestimmen Sie Minima und Maxima der Funktion

$$g(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \beta_i x_i^2$$

unter der Nebenbedingung $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 1$.

Aufgabe 39. (mündlich) (*Kritische Punkte*)

Sei U eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ zweimal stetig differenzierbar. Ein Punkt $\zeta \in \mathbb{R}^n$ heißt „kritischer Punkt“ von f , wenn $\text{grad} f(\zeta) = 0$. Der kritische Punkt heißt „nicht ausgeartet“, wenn $\det H_f(\zeta) \neq 0$. Man zeige: Ist $\zeta \in X$ ein nicht ausgearteter kritischer Punkt von f , so gibt es eine Umgebung von ζ , in der keine weiteren kritischen Punkte von f liegen.

(Hinweis: Beachten Sie, dass die Hesse-Matrix H_f die Jacobi-Matrix des Gradienten ist.)